

UNIVERSITY OF HAWAII  
ARCHIVE  
LIBRARY

JUL 16 1959

# RATIONAL MECHANICS *and* ANALYSIS

*Edited by*  
C. TRUESDELL

*Volume 3, Number 2*



SPRINGER-VERLAG  
BERLIN-GÖTTINGEN-HEIDELBERG  
(Postverlagsort Berlin • 20.4.1959)

*Mechanicam vero duplicem Veteres constituerunt: Rationalem quae per Demonstrationes accurate procedit, & Practicam. Ad practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utique Mechanica nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut Mechanica omnis a Geometria ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad Geometriam referatur, quicquid minus accuratum ad Mechanicam. Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus.*

NEWTON

*La généralité que j'embrasse, au lieu d'éblouir nos lumieres, nous découvrira plutôt les véritables loix de la Nature dans tout leur éclat, & on y trouvera des raisons encore plus fortes, d'en admirer la beauté & la simplicité.*

EULER

*Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche ...*

LAGRANGE

---

The ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS nourishes the discipline of mechanics as a deductive, mathematical science in the classical tradition and promotes pure analysis, particularly in contexts of application. Its purpose is to give rapid and full publication to researches of exceptional moment, depth, and permanence.

Each memoir must meet a standard of rigor set by the best work in its field. Contributions must consist largely in original research; on occasion, an expository paper may be invited.

English, French, German, Italian, and Latin are the languages of the Archive. Authors are urged to write clearly and well, avoiding an excessively condensed or crabbed style.

Manuscripts intended for the Archive should be submitted to an appropriate member of the Editorial Board.

---

The ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS appears in numbers struck off as the material reaches the press; five numbers constitute a volume. Subscriptions may be entered through any agent. The price is DM 96.— per volume.

Notice is hereby given that for all articles published exclusive rights in all languages and countries rest with Springer-Verlag. Without express permission of Springer-Verlag, no reproduction of any kind is allowed.

Authors receive together 75 offprints free of charge.



# Nicht-lineare Elastizitätstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen

Herrn Professor Dr. Dr. h. c. RICHARD GRAMMEL zu seinem siebenzigsten Geburtstag am  
3. März 1959 gewidmet.

EKKEHART KRÖNER und ALFRED SEEGER

Vorgelegt von J. MEIXNER

Inhalt	Seite
1. Der geometrische Ursprung der Eigenspannungen . . . . .	99
2. Die Grundgleichungen der Eigenspannungsbestimmung . . . . .	101
3. Die Eigenspannungsbestimmung aus den Grundgleichungen . . . . .	104
4. Ebene Eigenspannungszustände in der Elastizitätstheorie zweiter Ordnung . .	106
5. Schraubenversetzungen . . . . .	109
6. Stufenversetzungen . . . . .	110
7. Diskussion . . . . .	112
Anhang . . . . .	116
Literatur . . . . .	118

Die nicht-Riemannsche Geometrie der Versetzungen von KONDO sowie von BILBY, BULLOUGH und SMITH wird zu einer nicht-linearen Elastizitätstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen vervollständigt. Die Grundgleichungen beinhalten formal das Verschwinden des zu dem nicht-Riemannschen natürlichen Zustand des Körpers mit Versetzungen gehörigen Einstein-Tensors; physikalisch sind sie die Bedingungen für den Zusammenhalt des Körpers (§ 2). Es gelingt, diese Bedingungen in Spannungsfunktionen und Versetzungsdichten allein auszudrücken, und zwar in den Koordinaten des deformierten Zustands. Da mit der Einführung der Spannungsfunktionen die Gleichgewichtsbedingungen identisch erfüllt sind, reichen die genannten Gleichungen zusammen mit den Randbedingungen und dem nicht-linearen Elastizitätsgesetz aus, den Spannungszustand des Körpers aus der Versetzungsdichte zu bestimmen (§ 3).

Als Beispiele werden die Grundgleichungen für Versetzungsanordnungen, die von der  $z$ -Koordinate nicht abhängen, explizit angegeben (§ 4) und die Spannungsfelder der singulären Schrauben- und Stufenversetzung im unendlich ausgedehnten, isotropen Medium berechnet (§ 5, 6). In der Diskussion (§ 7) wird gezeigt, daß Probleme, die sich in der linearen Theorie besonders gut mit Spannungsfunktionen behandeln lassen, diese Eigenschaft in der quadratischen Theorie beibehalten. Insbesondere ergibt sich eine sehr übersichtliche Darstellung für die mit der Airyschen Spannungsfunktion zu behandelnden Probleme. Temperatur-, Konzentrations- und magnetostriktive Spannungen lassen sich leicht in die Theorie einordnen.

Eine allgemeine nicht-lineare Theorie der Eigenspannungen unterscheidet sich von der konventionellen nicht-linearen Elastizitätstheorie prinzipiell dadurch, daß in ersterer die (nicht-linearen) Kompatibilitätsgleichungen nicht erfüllt sind. Infolgedessen wird die in der konventionellen Theorie [1, 2, 3] benutzte Vorstellung eines elastischen Verschiebungsfeldes gegenstandslos, und man hat zur Bestimmung der Eigenspannungen bei gegebenen Eigenspannungsquellen die



Methode der (im allgemeinen dreidimensionalen) Spannungsfunktionen zu benutzen. Diese Bemerkung gilt nicht für den Fall, daß die Eigenspannungsquellen im Körper singular verteilt sind, denn dann existiert außerhalb der Singularitäten ein (wenn auch im allgemeinen mehrdeutiges) Verschiebungsfeld, mit Hilfe dessen man nach der konventionellen Theorie arbeiten kann. Anwendungen dieser Theorie auf gewisse besonders einfache Versetzungsprobleme sind kürzlich gegeben worden [4, 5].

Sowie man zu etwas weniger einfachen Problemen übergeht, erweist sich der Formalismus der konventionellen Theorie als sehr schwerfällig. Die Erfahrungen in der linearen Theorie haben definitiv gezeigt, daß Versetzungsprobleme sich im allgemeinen wesentlich einfacher mit Hilfe der Spannungsfunktionen als mit Hilfe des Verschiebungsfeldes behandeln lassen. Man darf daher wohl einige Hoffnung an eine Methode der Spannungsfunktionen in der nicht-linearen Elastizitätstheorie nicht nur stetig verteilter, sondern auch singularer Versetzungen knüpfen.

Eine solche nicht-lineare Theorie der Versetzungen oder — was auf dasselbe hinauskommt — der Eigenspannungen kann man in zweierlei Weise entwickeln.

1. Analog zu der von KRÖNER [6] entwickelten linearen Theorie der Eigenspannungen, indem man die dortigen Schlüsse nun im Hinblick auf große Verformungen wiederholt. Diese Theorie bedient sich einfacher Größen, nämlich neben Versetzungen und Spannungsfunktionen im wesentlichen der Deformationen, Drehungen (deren Summe als Distorsionen bezeichnet wird) und des inzwischen gut verstandenen, für den Eigenspannungszustand fundamentalen Inkompatibilitätstensors. Die Theorie hat den Stil der Darstellungen der Elastizitätstheorie in den gebräuchlichen Lehrbüchern, von denen etwa das schöne Werk von C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL [7] besonders erwähnt werden möge. Für den Kenner dieses Buches sollte die lineare Theorie der Versetzungen leicht zu begreifen sein. Die Ausdehnung der Theorie auf große Verformungen hat vor allem in einer Trennung der sich zunächst für die Distorsionen ergebenden Gleichungen in solche für Deformationen und Drehungen allein zu bestehen. Da sich nun Deformation und Drehung nicht mehr linear überlagern und die Rotation kein antisymmetrischer Tensor mehr ist, birgt diese Art von Analyse mancherlei Schwierigkeit. Wir werden daher den zweiten Weg beschreiten, obwohl es durchaus möglich ist, daß man später einmal den ersten Weg als den einfacheren ansehen wird.

2. Der zweite Weg besteht in der Anwendung der nicht-Riemannschen Geometrie der Versetzungen, wie sie unabhängig von KONDO u. Mitarb. einerseits [8, 9] und von BILBY, BULLOUGH und SMITH u. Mitarb. andererseits [10–13] in den letzten Jahren entwickelt wurde. Diese Theorie hat den Vorzug, daß sie von vornherein für große Verformungen gilt und ist bereits soweit ausgebaut, daß man nur sehr wenig hinzufügen muß, um zu den geometrischen Grundgleichungen für die Eigenspannungsbestimmung zu kommen. Die nicht-Riemannsche Geometrie der Versetzungen ist eine höchst eindrucksvolle und in sich geschlossene Theorie von großer Allgemeinheit. Andererseits wird der mit der Differentialgeometrie weniger vertraute, eine Eigenspannungsberechnung beabsichtigende Leser die Benützung des Formalismus des Ricci-Kalküls als eine kaum zumutbare Belastung emp-

finden. Hierzu ist indessen zu sagen, daß man zwar für die Ableitung der geometrischen Grundgleichungen der Eigenspannungsbestimmung die Begriffe der allgemeinen nicht-Riemannschen Geometrie braucht, daß in den Gleichungen selbst jedoch nur wie in der linearen Theorie die gebräuchlichen Begriffe Deformation, Versetzungsdichte, Inkompatibilität und Spannungsfunktion vorkommen. In den Bezeichnungen halten wir uns hauptsächlich an das Buch von SCHOUTEN ([14], insbesondere Kap. III, § 1 bis 4).

In § 1 und § 2 wird einiges über die Idee des nicht-Euklidischen natürlichen Zustands eines Mediums mit Eigenspannungen gesagt. Eine ausführlichere Darstellung dieser Gesichtspunkte findet man bei KONDO [9]. In § 2 werden ferner die genannten geometrischen Grundgleichungen der Eigenspannungsbestimmung bei gegebener Versetzungsverteilung abgeleitet. Man vergleiche hierzu insbesondere die Arbeiten von KONDO und von BILBY u. Mitarb. § 3 hat einiges über die Lösung der Grundgleichungen im allgemeinen zu sagen, § 4 bringt die Spezialisierung auf ebene Zustände, von denen in § 5 und § 6 vor allem Anordnungen von Schrauben- und Stufenversetzungen untersucht werden. Dabei wird das Problem der singulären Schrauben- und Stufenversetzung im unendlich ausgedehnten, isotropen Medium im Rahmen der Elastizitätstheorie zweiter Ordnung exakt gelöst.

### § 1. Der geometrische Ursprung der Eigenspannungen

Zur Analyse des Zustands eines mechanisch beanspruchten Mediums hat man dieses in zwei Zuständen miteinander zu vergleichen:

1. Im natürlichen Zustand.
2. Im deformierten Zustand.

Handelt es sich um reine Lastspannungen (äußere Spannungen), so kann man den natürlichen Zustand des gesamten Mediums von dem deformierten aus durch Wegnahme der äußeren Kräfte erreichen. Handelt es sich dagegen um Eigenspannungen, so hat man bekanntlich den deformierten Körper in seine Volumenelemente auseinander zu schneiden; erst dann können diese ihren natürlichen Zustand annehmen.

Man kann formal das Zustandekommen von Eigenspannungen auf einen Zwang zurückführen, der dem Körper das Verlassen des realen (Euklidischen) Raumes verbietet. Könnte man diesen Zwang plötzlich beseitigen, so würde sich der Körper in einen gewissen nicht-Euklidischen Raum hinein vollkommen entspannen; man kann m.a.W. auch dem Körper als ganzem einen natürlichen Zustand zuordnen, dieser ist aber nicht mehr Euklidisch.

Wir kennzeichnen die gegenseitige Lage zweier benachbarter Punkte im deformierten Zustand durch einen Vektor (Summationskonvention!)

$$d\mathbf{x} = dx^k \mathbf{e}_k, \quad (1)$$

wo die Basis  $\mathbf{e}_k$  ein beliebiges, im allgemeinen krummliniges und nicht-orthogonales Koordinatensystem ( $k$ ) des Euklidischen Raumes repräsentiert. Die gegenseitige Lage derselben Materiepunkte im (nicht-Euklidischen) natürlichen Zustand sei durch den Vektor

$$d\mathbf{x}_0 = dx^\kappa \mathbf{e}_\kappa \quad (2)$$

in einem ebenso willkürlichen Koordinatensystem ( $\kappa$ ) des nicht-Euklidischen Raumes beschrieben.



Das Quadrat des Abstandes der genannten Punkte ist im deformierten Zustand

$$ds^2 = a_{kl} dx^k dx^l, \quad a_{kl} = e_k \cdot e_l \quad (3)$$

und im natürlichen Zustand

$$ds_0^2 = g_{\kappa\lambda} dx^\kappa dx^\lambda, \quad g_{\kappa\lambda} = e_\kappa \cdot e_\lambda. \quad (4)$$

Man kann im letzten Fall die beiden Punkte auch durch ihre gegenseitige Lage im deformierten Zustand kennzeichnen und hat dann

$$ds_0^2 = g_{kl} dx^k dx^l, \quad g_{kl} = A_k^\kappa A_l^\lambda g_{\kappa\lambda}. \quad (5)$$

Der Zusammenhang zwischen den Zuständen  $(k)$  und  $(\kappa)$  sei also durch

$$dx^\kappa = A_k^\kappa dx^k, \quad dx^k = A_\kappa^k dx^\kappa \quad (6)$$

gegeben, wobei

$$A_k^\kappa A_\kappa^l = \delta_k^l, \quad A_\kappa^k A_k^\lambda = \delta_\kappa^\lambda. \quad (7)$$

Wenn Eigenspannungen wirken, sind die Beziehungen (6) nicht mehr wie in der nicht-linearen Theorie der Lastspannungen integrierbar, d.h. die  $A_k^\kappa$  haben nicht die Form einer Jakobischen Matrix  $\partial x^\kappa / \partial x^k$ . Ihre physikalische Bedeutung bleibt aber offenbar dieselbe: Eine Transformation des natürlichen Zustands in den deformierten Zustand.

Wir wollen weiterhin alle Feldgrößen als Funktion der Koordinaten  $x^k$  ansehen. Sinngemäß definieren wir dann den Eulerschen Deformationstensor  $(\varepsilon_{kl})$  durch die Gleichung

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{kl} dx^k dx^l, \quad (8)$$

also

$$g_{kl} = a_{kl} - 2\varepsilon_{kl}. \quad (9)$$

Wir definieren nun die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} g'_{mlk} &\equiv \frac{1}{2} (\partial_m g_{kl} + \partial_l g_{mk} - \partial_k g_{lm}); \\ g_{mlk} &\equiv \frac{1}{2} (V_m g_{kl} + V_l g_{mk} - V_k g_{lm}). \end{aligned} \quad (10)$$

Diese Definitionen sollen auch dann gelten, wenn man überall  $g$  durch  $a$  oder  $\varepsilon$  ersetzt. Für später brauchen wir ferner die Größen  $a^{hk}$  und  $g^{hk}$ , die wir durch

$$a^{hk} a_{kl} = \delta_l^h, \quad g^{hk} g_{kl} = \delta_l^h \quad (11)$$

definieren. In den Gln. (10) sei  $\partial_m \equiv \partial / \partial x^m$ , während  $V_m$  das Symbol für kovariante Differentiation im deformierten Zustand bezüglich der  $a_{kl}$ -Metrik ist, also z.B. \*

$$V_m g_{kl} = \partial_m g_{kl} - a'_{mk}{}^p g_{pl} - a'_{ml}{}^p g_{kp}. \quad (12)$$

Nun ist die Metrik des deformierten Zustands Euklidisch, d.h. der zugehörige Riemannsche Krümmungstensor

$$A_{nmik} = 2[\partial_n a'_{mlk} - a^{pq} a'_{nkq} a'_{mip}]_{[nm]} \quad (13)$$

\* Wo nicht anders bestimmt, bezieht sich das Heben und Senken der Indizes auf die  $a_{kl}$ -Metrik. Man beachte, daß diese Operation mit der kovarianten Differentiation  $V_m$  vertauschbar ist, nicht aber mit der gewöhnlichen Differentiation  $\partial_m$ . Ausgenommen von dieser Vereinbarung sei durchgehend der zu  $g_{pq}$  inverse Tensor  $g^{pq}$ , für den nach Gl. (11) nicht  $a_{ip} a_{jq} g^{pq} = g_{ij}$ , sondern  $g_{ip} g_{jq} g^{pq} = g_{ij}$  gilt.

verschwindet identisch. Mit dem an die eckige Klammer angehängten Symbol  $[nm]$  ist gemeint, daß der antisymmetrische Teil bezüglich der Indizes  $n, m$  zu nehmen ist.

Die Metrik des natürlichen Zustands ist hingegen bei Vorliegen von Eigenspannungen grundsätzlich nicht-Euklidisch, d.h. der zugehörige Riemann-Tensor

$$G_{nmlk} = 2[\partial_n g'_{mlk} - g^{pq} g'_{nkp} g'_{mlq}]_{[nm]} \quad (14)$$

verschwindet in diesem Fall nicht.

Wegen der bekannten Symmetriebeziehung

$$G_{nmlk} = -G_{mnlk} = -G_{nmkl} = G_{lknm} \quad (15)$$

verliert man offenbar nichts, wenn man aus  $G_{nmlk}$  den zugehörigen Ricci-Tensor

$$G_{ml} = G_{kml}^k \quad (16)$$

und aus diesem wiederum den zugehörigen Einstein-Tensor

$$\eta^{ml} = G^{ml} - \frac{1}{2} a^{ml} G_p^p = \frac{1}{4} \varepsilon^{lni} \varepsilon^{mjk} G_{nij k} \quad (17)$$

bildet. Die leicht zu verifizierende letzte Beziehung zeigt (vgl. [15], S. 154), daß  $\eta^{ml}$  bei kleinen Deformationen mit dem schon früher zur Eigenspannungsbestimmung benützten sog. Inkompatibilitätstensor zusammenfällt ([16], [6], S. 127). Wie dieser ist  $\eta^{ml}$  quellenfrei ( $\nabla_m \eta^{ml} = 0$ ).

Es empfiehlt sich, in Gl. (17) unter Benützung von (12)  $g_{mlk}$  anstelle von  $g'_{mlk}$  usw. einzuführen. Man erhält so, wenn man gemäß Gl. (9)

$$g_{mlk} = -2\varepsilon_{mlk} \quad (18)$$

setzt (denn es ist nach Gl. (10)  $a_{mlk} \equiv 0$ , da dort nur kovariante Ableitungen der  $a_{kl}$ -Metrik auftreten),

$$\eta^{ij} = -\varepsilon^{jnm} \varepsilon^{ilk} [V_n \varepsilon_{mlk} + 2g^{pq} \varepsilon_{nkp} \varepsilon_{mlq}], \quad (19)$$

wobei  $g^{pq}$  nach Gl. (9) und (11) der zu  $(a_{kl} - 2\varepsilon_{kl})$  inverse Tensor ist.

Setzt man in Gl. (19)  $\eta^{ij} \equiv 0$ , so hat man die bekannten (nicht-linearen) Kompatibilitätsgleichungen der Elastizitätstheorie vor sich [2, 17]. In einem Körper mit Eigenspannungen ist immer  $\eta^{ij} \neq 0$ .

## § 2. Die Grundgleichungen der Eigenspannungsbestimmung

Über den natürlichen Zustand des Mediums mit Versetzungen wissen wir bisher nur, daß er nicht-Euklidisch ist und die Metrik (4) hat. Einen nicht-Euklidischen Raum pflegt man mit Hilfe des Begriffes der Connexion zu definieren [14], und zwar genügt in unserem Falle die *lineare* oder *affine* Connexion  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}(x^k)$  (auch als Affinität bezeichnet). Mit Hilfe dieser definiert man ein Parallelverschiebungsgesetz für Vektoren: Zwei Vektoren  $\mathfrak{C}(P)$  und  $\mathfrak{C}(Q)$  in zwei um  $dx^\mu$  auseinander liegenden Punkten  $P$  und  $Q$ , deren Komponenten sich um

$$dC^\kappa = -\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} C^\lambda dx^\mu \quad (20)$$

unterscheiden, werden als parallel bezeichnet.



Wir gehen jetzt wieder zu dem Koordinatensystem  $(k)$  über und definieren die kovariante Differentiation (Symbol  $\overset{*}{V}_m$ ) bezüglich der Connexion  $\Gamma_{ml}^k$  gleich an dem Metriktenor, wobei wir ausnahmsweise jetzt den oberen Index auf die  $g_{kl}$ -Metrik beziehen, d.h.

$$\Gamma_{ml}^p g_{pk} = \Gamma_{mlk}. \quad (21)$$

Dann soll gelten

$$\begin{aligned} \overset{*}{V}_m g_{ik} &\equiv \partial_m g_{ik} - \Gamma_{ml}^p g_{pk} - \Gamma_{mk}^p g_{ip} \\ \overset{*}{V}_l g_{mk} &\equiv \partial_l g_{mk} - \Gamma_{lm}^p g_{pk} - \Gamma_{lk}^p g_{mp} \\ - \overset{*}{V}_k g_{lm} &\equiv -\partial_k g_{lm} + \Gamma_{kl}^p g_{pm} + \Gamma_{km}^p g_{lp}. \end{aligned} \quad (22)$$

Die kovarianten Ableitungen in (22) verschwinden, da sie Ableitungen des eigenen Metriktenors darstellen. Bildet man die halbe Summe der Gln. (22), so erhält man leicht, wenn man noch  $\Gamma_{ml}^k$  in symmetrischen Teil  $\Gamma_{(ml)}^k$  und antisymmetrischen Teil  $\Gamma_{[ml]}^k$  aufgespaltet ([14], S. 131 ff., [9], S. 462, [18], S. 66) <sup>\*</sup>,

$$\Gamma_{mlk} = g'_{mlk} + h_{mlk} \quad (23)$$

mit

$$h_{mlk} \equiv \Gamma_{[ml]}^k + \Gamma_{[km]}^l - \Gamma_{[lk]}^m. \quad (24)$$

Den in den Indizes  $m, l$  antisymmetrischen Teil  $\Gamma_{[ml]}^k$  einer Connexion  $\Gamma_{mlk}$  bezeichnet man nach CARTAN als Torsion [19]. Wir werden sehen, daß sowohl  $\Gamma_{[ml]}^k$  als auch  $h_{mlk}$  eine einfache physikalische Bedeutung besitzen. Im Moment vermerken wir aber nur, daß beide Größen die Transformationseigenschaften eines Tensors dritter Stufe haben, im Gegensatz zu dem symmetrischen Teil der Connexion  $\Gamma_{(ml)}^k$ , der einer komplizierteren Transformationsformel gehorcht, die wir hier aber nicht benötigen. Man prüft weiter leicht nach, daß  $h_{mlk}$  in den letzten beiden Indizes antisymmetrisch ist.

Der zu der Connexion  $\Gamma_{mlk}$  gehörige Riemannsche Krümmungstensor schreibt sich

$$R_{nm lk} = 2[\partial_n \Gamma_{mlk} - g^{pq} \Gamma_{nkq} \Gamma_{mlp}]_{[nm]} \quad (25)$$

und hat die gleichen Symmetrieeigenschaften wie  $G_{nm lk}$  mit der Ausnahme ([14], S. 138 ff.)

$$R_{nm lk} \neq \pm R_{lk nm}. \quad (26)$$

Dies bedeutet, daß man wiederum nichts verliert, wenn man zu dem Einstein-Tensor übergeht, daß dieser aber nun im Gegensatz zu  $\eta^{ij}$  nicht mehr symmetrisch ist.

Wir schreiben zunächst den Riemann-Tensor an, indem wir in (25)  $\Gamma_{mlk}$  nach Gl. (23) und (18) durch  $\varepsilon_{mlk}$  und  $h_{mlk}$  ersetzen. Man erhält so

$$R_{nm lk} = 2[V_n(-2\varepsilon_{mlk} + h_{mlk}) - g^{pq}(-2\varepsilon_{nkq} + h_{nkq})(-2\varepsilon_{mlp} + h_{mlp})]_{[nm]}. \quad (27)$$

BILBY und SMITH [12] haben das Verschwinden des Krümmungstensors  $R_{nm lk}$  als ein physikalisches Erfordernis bezeichnet, welches nötig ist, damit man an jedem Punkt eines deformierten Kristalls noch eine Kristallstruktur eindeutig

<sup>\*</sup> Gl. (23) stellt bekanntlich die allgemeinste *metrische* Affinität dar.



feststellen kann. Nach der Analyse von KRÖNER [6] liegt es nahe, das Verschwinden von  $R_{nmlk}$  als Zwangsbedingung für den Zusammenhang des Körpers zu verstehen. Beide Feststellungen meinen denselben Sachverhalt und sind *makroskopischer* Natur. (In der mikroskopischen Theorie hat man Differenzengleichungen anstelle von Differentialgleichungen und etwas abgeänderte physikalische Bedeutung, [6], S. 94 ff.) KONDO hat über die genannten Autoren hinaus den Fall des nicht-verschwindenden Krümmungstensors  $R_{nmlk}$  besprochen ([9], S. 465 ff.). Wahrscheinlich hat man damit Körper zu beschreiben, die makroskopische Risse zeigen. Es würde uns hier indessen zu weit führen, diese Überlegungen weiter zu verfolgen.

Wir werden daher das Verschwinden des Riemann-Tensors (27) oder, äquivalent, des zugehörigen Einstein-Tensors als die geometrischen Grundgleichungen unserer nicht-linearen Theorie der Eigenspannungen ansehen. Indem wir sie in der Einsteinschen Form anschreiben, erhalten wir für den symmetrischen Teil

$$\frac{1}{2} \{ \varepsilon^{ijnm} \varepsilon^{ilk} [V_n (-2\varepsilon_{mlk} + h_{mlk}) - g^{pq} (-2\varepsilon_{nkq} + h_{nkq}) (-2\varepsilon_{mip} + h_{mip})] \}_{(ij)=0} \quad (28)$$

mit  $(ij) \equiv$  symmetrischer Teil bezüglich  $i, j$ . Den antisymmetrischen Teil multiplizieren wir mit  $\varepsilon_{kij}$  und erhalten

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{nml} R_{nmlk} = -V_n \alpha_{.k}^n + g^{pq} (-2\varepsilon_{nkq} + h_{nkq}) \alpha_{.p}^n = 0. \quad (29)$$

Hier haben wir, vielleicht etwas inkonsequent, aber zweckmäßig, gleich den von KONDO [8] sowie von BILBY, BULLOUGH und SMITH [11] gefundenen wichtigen Zusammenhang zwischen Torsion  $\Gamma_{[ml]k}$  und (lokaler) Versetzungsdichte  $\alpha_{.k}^n$  benutzt, in Gleichungsform

$$\Gamma_{[ml]k} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{mip} \alpha_{.k}^p, \quad \alpha_{.k}^n = -\varepsilon^{nml} \Gamma_{[ml]k} \quad (30)$$

geschrieben, woraus

$$h_{mlk} = -\frac{1}{2} (\varepsilon_{mip} \alpha_{.k}^p + \varepsilon_{kmp} \alpha_{.l}^p - \varepsilon_{lkp} \alpha_{.m}^p), \quad \alpha_{.k}^n = -\varepsilon^{nml} h_{mlk} \quad (31)$$

folgt. Hier ist der (ursprünglich von NYE [20] definierte) Versetzungstensor  $\alpha_{.k}^n$  so gewählt, daß der erste Index ( $n$ ) den Linienverlauf, der zweite den Burgers-Vektor charakterisiert.

Nach Gl. (31) kann man  $h_{mlk}$  als eine spezielle Beschreibung der Versetzungsdichte ansehen. Es gibt indessen noch eine direktere Interpretation: Wegen der Antisymmetrie von  $h_{mlk}$  in  $k, l$  liegt es nahe, den zugehörigen Tensor zweiter Stufe zu bilden, den wir  $-2K_{.m}^n$  nennen wollen, also (siehe [12], Gln. (19), (20))

$$h_{mlk} = -\varepsilon_{nlk} K_{.m}^n, \quad K_{.m}^n = -\frac{1}{2} \varepsilon^{nlk} h_{mlk}. \quad (32)$$

Die Beziehungen

$$\alpha_{.m}^n = K_{.k}^k \delta_m^n - K_{.m}^n, \quad K_{.m}^n = \frac{1}{2} \alpha_{.k}^k \delta_m^n - \alpha_{.m}^n \quad (33)$$

sind dann leicht verifiziert. Der Tensor  $K_{.m}^n$  ist als Nyescher Krümmungstensor bekannt. Er gibt die Änderung der Kristallorientierung  $d\vartheta^n$  beim Fortschreiten um eine Strecke  $dx^m$  an (und zwar den „Korngrenzenanteil“, [6], S. 35 ff.), also

$$d\vartheta^n = K_{.m}^n dx^m. \quad (34)$$

Dies folgt aus Gl. (20) (man ersetze  $\Gamma$  durch  $h$ ). Zu dem Nyeschen Krümmungstensor vergleiche insbesondere auch ESHELBY [21].

### § 3. Die Eigenspannungsbestimmung aus den Grundgleichungen

Der Tensor  $\alpha^{kl}$  in den Gln. (28) und (29) gibt die sog. *lokale* Versetzungsdichte an [22, 10, 11]. Sie entsteht aus der *natürlichen* Versetzungsdichte des natürlichen Zustands durch die Abbildung auf den deformierten Zustand

$$\alpha^{kl} = A_{\alpha}^k A_{\lambda}^l \alpha^{\alpha\lambda}. \quad (35)$$

In der Kristallphysik wird oft eine andere Kennzeichnung der Versetzungen gewählt. Man vergleicht nach FRANK ([22], [23], S. 387) einen geschlossenen Umlauf im deformierten Kristall mit einem korrespondierenden Umlauf in einem sog. Idealkristall und definiert den Schließungsfehler im letzteren Umlauf als *wahren* Burgers-Vektor der Versetzung. Während eine kontinuierliche Versetzungsdichte wohl im allgemeinen als lokale Dichte vorliegt, ist der Burgers-Vektor von singulären Versetzungen meist als wahrer Burgers-Vektor gegeben. In diesem Fall gibt es gewisse Komplikationen, die so gelöst werden können, daß man mit Hilfe der zuerst berechneten linearen Näherung (für die der Unterschied wahr — lokal noch nicht besteht) die wahre Versetzungsdichte näherungsweise in die lokale umrechnet, bevor man den zweiten Näherungsschritt macht usw.

Bekanntlich können Versetzungslinien im Innern eines Körpers nicht endigen, ohne daß dort der Zusammenhang zerstört wird. Diese Bedingung schreibt sich nach NYE [20] im Idealkristall, d. h. für die wahre Versetzungsdichte  $\alpha^{\alpha\beta}$

$$\nabla_{\alpha} \alpha^{\alpha\beta} = 0. \quad (36)$$

Für eine singuläre Versetzung, die mathematisch durch

$$\alpha^{\alpha\beta} = t^{\alpha} b^{\beta} \quad (37)$$

zu beschreiben ist, ( $t^{\alpha}$  = Tangenteneinheitsvektor der Linie,  $b^{\beta} \equiv (b^{\beta})$  = Burgers-Vektor) lautet Gl. (36) wegen  $\nabla_{\alpha} t^{\alpha} = 0$  auch

$$d b / d t = 0; \quad (38)$$

in Worten: Der Burgers-Vektor einer Versetzungslinie ist längs dieser konstant. Ersichtlich ist (29) die Darstellung des Gesetzes (36) im deformierten Zustand (für die lokale Versetzungsdichte). Für eine einzelne Versetzung  $t^{\alpha} b^{\beta}$  erhält man dann leicht die von der Deformation bewirkte Inkonzanz des Burgers-Vektors im deformierten Zustand (des lokalen Burgers-Vektors) zu

$$d b^k / d t = - g^{pq} (2 \varepsilon_{n k q} - \frac{1}{2} \varepsilon_{k q r} t^r b_n) t^n b_p. \quad (39)$$

Die weiteren Rechnungen dieser Arbeit führen wir einfachheitshalber in cartesischen Koordinaten durch. Dann verschwindet der Unterschied zwischen Ko- und Kontravarianz, es wird  $\nabla_n \equiv \partial_n$ ,  $a'_{m l k} \equiv 0$ ,  $a_{k l} = \delta_{k l}$  usw. Alle Tensorindizes schreiben wir von nun an unten. Ferner verzichten wir vorerst auf eine Besprechung des Randwertproblems, d. h. wir nehmen ein unendlich ausgedehntes Medium an. Die Berücksichtigung von Randbedingungen stellt jedenfalls keine grundsätzliche Schwierigkeit dar (vgl. § 7).

Wir besprechen jetzt die Lösung der Grundgleichungen (28) unter der Annahme „lokale Versetzungsdichte gegeben“. Von dieser verlangen wir, daß sie die Gln. (29) befriedigt.



Vernachlässigt man in Gl. (28) die nicht-linearen Glieder, und setzt man  $\varepsilon_{mlk}$  und  $h_{mlk}$  gemäß Gl. (10) und (31) ein, so bleibt der von KRÖNER ([24], [6], S. 34) zuerst angegebene Zusammenhang zwischen den Deformationen und der Versetzungsdichte, oder, wenn man will, zwischen dem (linearen) Inkompatibilitätstensor  $\eta_{ij}^0$  und der Versetzungsdichte

$$-(\varepsilon_{jnm} \varepsilon_{ilk} \partial_n \partial_l \varepsilon_{mk})_{(ij)} = -(\varepsilon_{jnm} \partial_n \alpha_{im})_{(ij)} \equiv \eta_{ij}^0 \quad (40)$$

übrig. Die Gln. (28) sind also die nicht-lineare Verallgemeinerung dieser gut verstandenen Gleichungen.

Zur störungstheoretischen Behandlung der Grundgleichungen (28) bei gegebener lokaler Versetzungsdichte  $\alpha_{kl}$  befriedigen wir zunächst die Gleichgewichtsbedingungen (bei Abwesenheit von Massenkraften,  $\sigma_{ij}$  = Spannungstensor)

$$\partial_i \sigma_{ij} = 0 \quad (41)$$

identisch durch den Spannungsfunktionsansatz ([26], [27], [6], S. 51 ff.)

$$\sigma_{ij} = -\varepsilon_{jnm} \varepsilon_{ilk} \partial_n \partial_l \chi_{mk} \quad (42)$$

mit der Nebenbedingung

$$\partial_i \left( \chi_{ij} - \frac{\nu}{1+2\nu} \chi_{kk} \delta_{ij} \right) / 2G = 0 \quad (43)$$

( $G$  = Schubmodul,  $\nu$  = Poisson-Zahl, der Körper ist elastisch homogen und isotrop angenommen). Die zugehörigen Deformationen folgen mit Hilfe des zuständigen nicht-linearen Elastizitätsgesetzes. Man erhält so die  $\varepsilon_{mlk}$  ausgedrückt in den Spannungsfunktionen. Die sich nach Einsetzen in (28) ergebenden Gleichungen lauten

$$\Delta \chi_{ij} = 2G \left[ \eta_{ij}^0 + P_{ij} + Q_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} (\eta_{kk}^0 + P_{kk} + Q_{kk}) \delta_{ij} \right]. \quad (44)$$

Hier entspricht

$$\Delta \chi_{ij} - 2G \left( \eta_{ij}^0 + \frac{\nu}{1-\nu} \eta_{kk}^0 \delta_{ij} \right) \quad (45)$$

dem linearen Anteil von (28) (gleich Null gesetzt ist (45) mit Gl. (40) gleichwertig [25]).  $P_{ij}$  ist definiert durch

$$P_{ij} = (\varepsilon_{jnm} \varepsilon_{ilk} \partial_n \partial_l \varepsilon_{mk}^Q)_{(ij)}, \quad (46)$$

wobei die  $\varepsilon_{kl}^Q$  denjenigen Teil der Deformationen  $\varepsilon_{kl}$  darstellen, der aus den Spannungen  $\sigma_{ij}$  durch Anwendung des nicht-linearen Anteils des Elastizitätsgesetzes folgt (§ 4). Die  $Q_{ij}$  sind definiert durch

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{jnm} \varepsilon_{ilk} s^{pq} \Gamma_{nq} \Gamma_{mlp})_{(ij)}, \quad \Gamma_{mlk} = -2\varepsilon_{mlk} + h_{mlk}. \quad (47)$$

Die Rechnung ist nun im Prinzip sehr einfach. Man setze zuerst  $P_{ij} = Q_{ij} = 0$  und berechne die lineare Näherung  $\chi_{ij}^0$  aus der Gleichung

$$\Delta \chi_{ij}^0 = 2G \left( \eta_{ij}^0 + \frac{\nu}{1-\nu} \eta_{kk}^0 \delta_{ij} \right). \quad (48)$$

Danach läßt sich das zugehörige  $P_{ij}^0 + Q_{ij}^0$  ausrechnen. Der Ausdruck  $\chi_{ij}^0 + \chi_{ij}^1$  mit

$$\Delta \chi_{ij}^1 = 2G \left[ P_{ij}^0 + Q_{ij}^0 + \frac{\nu}{1-\nu} (P_{kk}^0 + Q_{kk}^0) \delta_{ij} \right] \quad (49)$$

ist eine bessere Näherung, noch besser ist  $\chi_{ij}^0 + \chi_{ij}^1 + \chi_{ij}^2$  mit

$$\Delta \chi_{ij}^2 = 2G \left[ P_{ij}^1 + Q_{ij}^1 + \frac{\nu}{1-\nu} (P_{kk}^1 + Q_{kk}^1) \delta_{ij} \right] \quad (50)$$

usw. Die lineare Näherung ist oft relativ gut zu erhalten. Wenn wir mit  $\chi_{ij}^0 + \chi_{ij}^1$  abbrechen, haben wir das Problem im Rahmen der Elastizitätstheorie zweiter Ordnung gelöst. Hiermit muß man sich wohl im allgemeinen zufrieden geben, da schon die für eine weitere Rechnung benötigten Elastizitätskonstanten nicht zur Verfügung stehen [4].

Wir bemerken noch, daß es im Rahmen der quadratischen Näherung genügt,  $g^{pq}$  in Gl. (28) durch  $a_{pq} = \delta_{pq}$  zu ersetzen, da sich beide Größen nach Gl. (11) und (9) nur um eine Größe der Ordnung  $\varepsilon_{kl}$  unterscheiden. Ferner braucht in diesem Fall für die  $\varepsilon_{mkl}$  in den nicht-linearen Termen von Gl. (28) bzw. (44) nur der mit dem linearen Elastizitätsgesetz erhaltene Anteil eingesetzt zu werden. Beide Vereinfachungen sind sehr wesentlich.

Die lineare Näherung des Spannungsfunktionstensors hat im Fall der singulären Versetzung die besonders einfache Form ([27], [6], S. 72)

$$\chi_{ij}^{0'} = \frac{1}{8\pi} \left( \varepsilon_{ijk} b_l \partial_k \oint_L r dL'_i \right)_{(ij)}, \quad \chi_{ij}^{0'} = \left( \chi_{ij}^0 - \frac{\nu}{1+2\nu} \chi_{kk}^0 \delta_{ij} \right) / 2G. \quad (51)$$

Hier ist  $r$  der Abstand zwischen dem Linienelement  $dL'_i$  der Versetzung und dem Aufpunkt. Die Integration erstreckt sich längs der Versetzungslinie.

#### § 4. Ebene Eigenspannungszustände in der Elastizitätstheorie zweiter Ordnung

Zu der expliziten Darstellung der Grundgleichungen für die Eigenspannungsbestimmung im Falle ebener Zustände benötigen wir das Elastizitätsgesetz explizit, und zwar in der Form  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}(\sigma_{ij})$ . Man gewinnt dieses Gesetz aus der zur Murnaghanschen Darstellung ([1], S. 64) der Energiedichte  $e$  analogen Form

$$e = \frac{1}{4G(1+\nu)} \sigma_I^2 - \frac{1}{2G} \sigma_{II} + \frac{L+2M}{3} \sigma_I^3 - 2M \sigma_I \sigma_{II} + N \sigma_{III}, \quad (52)$$

in der

$$\sigma_I = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \quad (53')$$

$$\sigma_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{zz} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{xx} \end{vmatrix}, \quad (53'')$$

$$\sigma_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (53''')$$

die skalaren Invarianten des Spannungstensors sind. Die Deformationen schreiben sich dann

$$\partial e / \partial \sigma_{xx} = \varepsilon_{xx} = \frac{1}{2G(1+\nu)} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \frac{L}{2G} \sigma_I^2 - 2M(\sigma_{II} - \sigma_I \sigma_{xx}) + N(\sigma_{yy} \sigma_{zz} - \sigma_{yz}^2), \quad (54')$$

$$\frac{1}{2} \partial e / \partial \sigma_{yz} = \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \sigma_{yz} + 2M \sigma_I \sigma_{yz} + N(\sigma_{xy} \sigma_{xz} - \sigma_{xx} \sigma_{yz}) \quad (54'')$$

usw. mit zyklischer Vertauschung der Indizes. Zu dem Zusammenhang der nicht-linearen Konstanten  $L, M, N$  mit den Murnaghanschen  $l, m, n$  s. Anhang.



Wir schreiben zunächst die linearisierten Grundgleichungen (40) mit  $\partial/\partial z = 0$  an, also

$$-\partial_{yy}\epsilon_{zz}^0 = -\partial_y\alpha_{xz}, \quad -\partial_{xx}\epsilon_{zz}^0 = \partial_x\alpha_{yz}, \quad \partial_{xy}\epsilon_{zz}^0 = (\partial_x\alpha_{xz} - \partial_y\alpha_{yz})/2, \quad (55')$$

$$-\partial_x(-\partial_x\epsilon_{yz}^0 + \partial_y\epsilon_{xz}^0) = \partial_x(\alpha_{zz} - \alpha_{yy})/2 + \partial_y\alpha_{yx}/2 \quad (55'')$$

$$\partial_y(-\partial_x\epsilon_{yz}^0 + \partial_y\epsilon_{xz}^0) = -\partial_y(\alpha_{zz} - \alpha_{xx})/2 - \partial_x\alpha_{xy}/2,$$

$$-\partial_{yy}\epsilon_{xx}^0 - \partial_{xx}\epsilon_{yy}^0 + 2\partial_{xy}\epsilon_{xy}^0 = \partial_y\alpha_{zx} - \partial_x\alpha_{zy}, \quad (55''')$$

wobei  $\partial_{xx} \equiv \partial^2/\partial x^2$  usw. Danach machen wir den aus den Gln. (42) folgenden „ebenen“ Spannungsfunktionsansatz ( $F_{xx} \equiv \partial_{xx}F$ ,  $\Phi_x \equiv \partial_x\Phi$  usw.)

$$\sigma_{xx} = F_{yy}, \quad \sigma_{yy} = F_{xx}, \quad \sigma_{xy} = -F_{xy}; \quad (56')$$

$$\sigma_{xz} = \Phi_y, \quad \sigma_{yz} = -\Phi_x; \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz} \quad (56'')$$

mit  $F \equiv -\chi_{zz}$  als Airyscher Spannungsfunktion und  $\Phi \equiv \partial_y\chi_{xz} - \partial_x\chi_{yz}$  als Spannungsfunktion der Torsion (oder Schubspannungsfunktion, [7], [6], S. 53. Die Gln. (57') und (59') werden zeigen, daß sich  $\sigma_{zz}$  in den uns interessierenden Fällen trivial ergibt.) Mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes bringen wir die Spannungen bzw. Spannungsfunktionen in die Gln. (55) ein. Die trivialen Integrationen dieser Gleichungen führen wir gleich durch, wobei wir eine unbestimmt bleibende, in den Ortskoordinaten lineare Deformation vorerst Null setzen. Es ergibt sich so ( $\Delta \equiv \partial_{xx} + \partial_{yy}$ )

$$\sigma_{zz}^0 = \nu \Delta F^0 + 2G(1 + \nu)\xi, \quad (57')$$

$$\Delta \Phi^0 = 2G\zeta, \quad (57'')$$

$$\Delta \Delta F^0 = -\frac{2G}{1-\nu}\eta. \quad (57''')$$

Die Funktionen  $\xi, \eta, \zeta$  bestimmen sich höchst einfach aus

$$\begin{aligned} \partial_y\xi &= \alpha_{xz}, & \partial_x\xi &= -\alpha_{yz}; \\ 2\partial_y\zeta &= -\partial_y(\alpha_{zz} - \alpha_{xx}) - \partial_x\alpha_{xy}, & 2\partial_x\zeta &= -\partial_x(\alpha_{zz} - \alpha_{yy}) - \partial_y\alpha_{yx} \\ \eta &= \partial_y\alpha_{zx} - \partial_x\alpha_{zy} + \nu(\partial_x\alpha_{yz} - \partial_y\alpha_{xz}). \end{aligned} \quad (58)$$

Die nun folgende Integration der Gln. (57) liefert die Spannungsfunktionen der linearen Näherung  $\Phi^0, F^0$  sowie  $\sigma_{zz}^0$ . Danach können wir zu dem zweiten Schritt des Näherungsverfahrens übergehen. Die zugehörigen Gln. (49) schreiben sich mit  $\partial/\partial z = 0$

$$\sigma_{zz}^1 = \nu \Delta F^1 + 2G(1 + \nu)(-\epsilon_{zz}^Q + Q'), \quad (59')$$

$$\Delta \Phi^1 = 2G(\partial_x\epsilon_{yz}^Q - \partial_y\epsilon_{xz}^Q + Q''), \quad (59'')$$

$$\Delta \Delta F^1 = -\frac{2G}{1-\nu}[\partial_{yy}\epsilon_{xx}^Q + \partial_{xx}\epsilon_{yy}^Q - 2\partial_{xy}\epsilon_{xy}^Q + \nu\Delta\epsilon_{zz}^Q + Q_{zz} + \nu(Q_{xx} + Q_{yy})], \quad (59''')$$

wobei

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}(\epsilon_{jnm}\epsilon_{ilk}\Gamma_{nq}\Gamma_{mlq})_{(ij)}, \quad \Gamma_{mlk} = -2\epsilon_{mlk}^0 + h_{mlk}, \quad (60')$$

$$\begin{aligned} \partial_{xx}Q' &= -Q_{xx}, & \partial_{yy}Q' &= -Q_{yy}, & \partial_{xy}Q' &= Q_{xy}; \\ \partial_xQ'' &= -Q_{yz}, & \partial_yQ'' &= Q_{xz}. \end{aligned} \quad (60'')$$

Die  $\varepsilon_{kl}^0$  folgen definitionsgemäß aus dem nicht-linearen Anteil des Elastizitätsgesetzes, angewandt auf  $\sigma_{ij}^0$ .

Die Integration des Gleichungssystems (59) liefert  $\sigma_{zz}^1$ ,  $\Phi^1$  und  $F^1$ , womit gemäß Gln. (56) alle Spannungen  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1$  in der quadratischen Näherung bestimmt sind. Dies gilt allerdings nur im unendlichen Medium; im endlichen Medium hat man noch für die Erfüllung der Randbedingungen zu sorgen, worüber in § 7 gesprochen wird.

Die für die Berechnung der  $Q_{ij}$  benötigten  $\Gamma_{mlk}$  ergeben sich mit Gl. (10) und (31) leicht zu

$$\begin{aligned} \Gamma_{zlk} &= 0 \\ \Gamma_{xxz} &= -\partial_x \varepsilon_{xx}^0, \quad \Gamma_{yxz} = -\partial_y \varepsilon_{xx}^0, \quad \Gamma_{xyy} = -\partial_x \varepsilon_{yy}^0, \quad \Gamma_{yyy} = -\partial_y \varepsilon_{yy}^0 \\ \Gamma_{xyx} &= -\partial_y \varepsilon_{xx}^0 - \alpha_{xz}, \quad \Gamma_{yxy} = -\partial_x \varepsilon_{yy}^0 + \alpha_{zy} \end{aligned} \quad (61a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{xxy} &= -2\partial_x \varepsilon_{xy}^0 + \partial_y \varepsilon_{xx}^0 + \alpha_{zx}, \quad \Gamma_{yyx} = -2\partial_y \varepsilon_{xy}^0 + \partial_x \varepsilon_{yy}^0 - \alpha_{zy}, \\ \Gamma_{xxz} &= \alpha_{yz}, \quad \Gamma_{yzz} = -\alpha_{xz}, \end{aligned} \quad (61b)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{xxz} &= -2\partial_x \varepsilon_{xz}^0 - \alpha_{yx}, \quad \Gamma_{yxz} = -2\partial_y \varepsilon_{xz}^0 + \alpha_{xx} \\ \Gamma_{xyx} &= -2\partial_x \varepsilon_{xy}^0 - \alpha_{yz}, \quad \Gamma_{yxy} = -2\partial_y \varepsilon_{xy}^0 + \alpha_{yx}, \end{aligned} \quad (61c)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{xxz} &= \alpha_{yz}, \quad \Gamma_{yzz} = -\alpha_{xz} \\ \Gamma_{xzy} &= \alpha_{yy}, \quad \Gamma_{yzy} = -\alpha_{xy}. \end{aligned} \quad (61d)$$

Hier wurde berücksichtigt, daß die  $\varepsilon_{kl}^0$  den linearen Gln. (55) genügen, ferner in den  $\Gamma_{mlk}$  mit  $m \neq l \neq k$  die aus Gl. (29) in erster Näherung folgenden Beziehungen  $\partial_x \alpha_{xx} + \partial_y \alpha_{yx} = 0$ ,  $\partial_x \alpha_{xy} + \partial_y \alpha_{yy} = 0$ .

Die Gln. (61) zerfallen in mehrere Gruppen, die wir jetzt kurz diskutieren.

a, b) Zu diesen Gruppen gehören einmal Stufenversetzungen, die in Ebenen senkrecht zur  $z$ -Richtung verlaufen und ihren Burgers-Vektor in  $z$ -Richtung haben ( $\alpha_{xz}, \alpha_{yz}$ ). Ist  $\alpha_{xz} = \alpha_{yz} = 0$ , so verschwinden stets die  $\Gamma_{mlk}$  der Gruppe b, diejenigen der Gruppe a aber dann nicht, wenn Stufenversetzungen in  $z$ -Richtung vorhanden sind ( $\alpha_{zx}, \alpha_{zy}$ ).

c, d) Zu diesen Gruppen gehören einmal Versetzungsanordnungen mit Linienverlauf und Burgers-Vektor senkrecht zur  $z$ -Richtung ( $\alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \alpha_{yx}, \alpha_{yy}$ ). Verschwinden diese Versetzungen, so verschwinden auch alle  $\Gamma_{mlk}$  der Gruppe d, diejenigen der Gruppe c aber dann nicht, wenn Schraubenversetzungen in  $z$ -Richtung vorhanden sind ( $\alpha_{zz}$ ). Damit sind alle neun Versetzungs-komponenten  $\alpha_{kl}$  eingeordnet.

Von den angeführten Problemen sind in der Kristallphysik die weitaus wichtigsten die zu Versetzungen in  $z$ -Richtung gehörigen. Wir werden daher weiterhin nur noch die beiden Probleme

„Beliebige Verteilung von Schraubenversetzungen  $\alpha_{zz}(x, y)$ “

„Beliebige Verteilung von Stufenversetzungen  $\alpha_{zx}(x, y), \alpha_{zy}(x, y)$ “

behandeln. Dann verschwinden jeweils die meisten der  $\Gamma_{mlk}$ , und auch die Berechnung der  $\varepsilon_{kl}^0$  vereinfacht sich wesentlich.



### § 5. Schraubenversetzungen

Im unendlich ausgedehnten Medium sei die lokale Versetzungsdichte  $\alpha_{zz}(x, y)$  gegeben. Als Teillösung der linearen Gln. (57) hat man wegen  $\xi = \eta = 0$  sofort  $\sigma_{zz}^0 = 0$ ,  $F^0 = 0$ . Deshalb ist von den linearen Deformationen  $\varepsilon_{kl}^0$  nur  $\varepsilon_{xz}^0$ ,  $\varepsilon_{yz}^0$  von Null verschieden. Weiter verschwinden alle  $Q_{ij}$  außer

$$Q_{zz} = \Gamma_{xyz} \Gamma_{yxz} - \Gamma_{xxz} \Gamma_{yyz} = 4[(\partial_y \varepsilon_{xz}^0)(\partial_x \varepsilon_{yz}^0) - (\partial_x \varepsilon_{xz}^0)(\partial_y \varepsilon_{yz}^0)]. \quad (62)$$

Mit  $\varepsilon_{xz}^0 = \sigma_{xz}^0/2G$ ,  $\varepsilon_{yz}^0 = \sigma_{yz}^0/2G$  und (56'') erhalten wir

$$Q_{zz} = -(\Phi_{xx}^0 \Phi_{yy}^0 - \Phi_{xy}^{02})/G^2. \quad (63)$$

Die Berechnung der  $\varepsilon_{kl}^0$  nach Gl. (54) ergibt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= 2M(\Phi_x^{02} + \Phi_y^{02}) - N\Phi_x^{02} \\ \varepsilon_{yy}^0 &= 2M(\Phi_x^{02} + \Phi_y^{02}) - N\Phi_y^{02} \\ \varepsilon_{zz}^0 &= 2M(\Phi_x^{02} + \Phi_y^{02}) \\ \varepsilon_{xy}^0 &= -N\Phi_x^0 \Phi_y^0 \\ \varepsilon_{xz}^0 &= \varepsilon_{yz}^0 = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Hiernach erhält man für das Gleichungssystem (59) im Falle von Schraubenversetzungen  $\alpha_{zz}(x, y)$

$$\sigma_{zz}^1 = \nu \Delta F^1 - 4MG(1 + \nu)(\Phi_x^{02} + \Phi_y^{02}), \quad (65')$$

$$\Delta \Phi^1 = 0, \quad (65'')$$

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F^1 &= -\frac{2G}{1-\nu} [2M(1 + \nu) \Delta(\Phi_x^{02} + \Phi_y^{02}) - \\ &\quad - N(\partial_{yy} \Phi_x^{02} + \partial_{xx} \Phi_y^{02} - 2\partial_{xy}(\Phi_x^0 \Phi_y^0)) - (\Phi_{xx}^0 \Phi_{yy}^0 - \Phi_{xy}^{02})/G^2] \\ &= -\frac{2G}{1-\nu} \left[ 2M(1 + \nu) \Delta(\Phi_x^{02} + \Phi_y^{02}) + \left( 2N - \frac{1}{G^2} \right) (\Phi_{xx}^0 \Phi_{yy}^0 - \Phi_{xy}^{02}) \right]. \end{aligned} \quad (65''')$$

Als Beispiel für die Lösung dieses Gleichungssystems behandeln wir die singuläre Schraubenversetzung in der  $z$ -Achse ( $\alpha_{zz} = b \delta(\varrho)$ ,  $\varrho^2 \equiv x^2 + y^2$ ,  $\varphi \equiv \arctg \frac{y}{x}$ ). Die Spannungsfunktion  $\Phi^0$  ergibt sich in diesem Fall zu ([6], S. 75)

$$\Phi^0 = -\frac{Gb}{2\pi} \ln \varrho. \quad (66)$$

Damit wird aus Gl. (65''')

$$\Delta \Delta F^1 = 4K/\varrho^4, \quad K \equiv -\frac{G^3 b^2}{8\pi^2(1-\nu)} \left[ 8M(1 + \nu) - 2N + \frac{1}{G^2} \right] \quad (67)$$

und hieraus folgt eindeutig (im unendlichen Medium)

$$\Delta F^1 = K/\varrho^2. \quad (68)$$

(Ein additives Glied  $\text{const.} \varphi$  hat nicht die erforderliche Rotationssymmetrie.) Mit Gl. (68) haben wir bereits

$$\sigma_{xx}^1 + \sigma_{yy}^1 = K/\varrho^2, \quad (69')$$

$$\sigma_{zz}^1 = [\nu K - 4MG(1 + \nu)]/\varrho^2. \quad (69'')$$

Um die übrigen Spannungskomponenten zu bekommen, integrieren wir Gl. (68), wobei wegen der Symmetrie des Problems  $F^1 = F^1(\varrho)$  sein sollte. Damit wird aus Gl. (68)

$$F_{\varrho\varrho}^1 + \frac{1}{\varrho} F_{\varrho}^1 = K/\varrho^2 \quad (70)$$

mit der Lösung

$$F^1 = K(\ln \varrho)^2/2. \quad (71)$$

(Beachte:  $\ln \varrho$  ist wegen  $\Delta \ln \varrho = \delta(\varrho)$  keine Lösung der homogenen Gleichung von (68), und ein additiver Summand  $\text{const.} \varphi$  in (68) bewirkt eine Verletzung der integralen Momenten-Gleichgewichtsbedingungen für die Zylindermantelflächen.) Die Spannungen ergeben sich gemäß Gl. (56') zu

$$\begin{aligned} F_{yy}^1 &= \sigma_{zz}^1 = K \left( \frac{x^2}{\varrho^4} - \frac{x^2 - y^2}{\varrho^4} \ln \varrho \right) \\ F_{xx}^1 &= \sigma_{yy}^1 = K \left( \frac{y^2}{\varrho^4} + \frac{x^2 - y^2}{\varrho^4} \ln \varrho \right) \\ -F_{xy} &= \sigma_{xy}^1 = K \frac{xy}{\varrho^4} (1 - 2 \ln \varrho), \end{aligned} \quad (72)$$

oder nach Transformation in Zylinderkoordinaten und gleich für  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1$  angeschrieben

$$\begin{aligned} \sigma_{\varrho\varrho} &= K \ln \varrho/\varrho^2 & \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{Gb}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varrho} \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= K(1 - \ln \varrho)/\varrho^2 & \sigma_{\varrho z} &= 0 \\ \sigma_{zz} &= [\nu K - 4MG(1 + \nu)]/\varrho^2 & \sigma_{\varphi\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (73)$$

Damit ist der Zustand des unendlich ausgedehnten Mediums mit einer Schraubenversetzung in der  $z$ -Achse im Rahmen der Elastizitätstheorie zweiter Ordnung exakt und vollständig bestimmt.

Schneidet man längs zweier Ebenen  $z = \pm a$  ( $a$  = beliebige Konstante) auf, so hat man dort Kräfte anzubringen, wenn keine zusätzlichen Deformationen auftreten sollen. Über eine der Flächen, z.B.  $z = +a$ , gemittelt verschwindet weder die Gesamtkraft (wegen  $\sigma_{zz}$ ) noch das Gesamtdrehmoment (wegen  $\sigma_{\varphi z}$ ). Solche Erscheinungen sind bei ebenen elastischen Zuständen wohlbekannt. Physikalisch kommen nur endliche Körper vor, dann werden diese Unstimmigkeiten durch Erfüllung der Randbedingungen beseitigt (vgl. ESHELBY [29]).

## § 6. Stufenversetzungen

Im unendlich ausgedehnten Medium sei die lokale Versetzungsdichte  $\alpha_{zx}(x, y)$ ,  $\alpha_{zy}(x, y)$  gegeben. Als Teillösung der linearen Gln. (57) hat man wegen  $\xi = 0$  sofort  $\varepsilon_{xz}^0 = \varepsilon_{yz}^0 = 0$ . Daher verschwinden in (61) alle  $F_{mlk}$  außer denen der Gruppe a. Das sind gerade diejenigen, bei denen der Index  $z$  nicht vorkommt, deshalb bleibt gemäß Gl. (60') von den  $Q_{ij}$  nur

$$Q_{zz} = F_{xyx} F_{yxx} + F_{xyy} F_{yyx} - F_{xxz} F_{yyx} - F_{xxy} F_{yyx} \quad (74)$$

übrig. In den Spannungsfunktionen geschrieben lautet dies

$$\begin{aligned} Q_{zz} &= \frac{1}{8G^2} \{ 4G(1 - 2\nu) (\alpha_{zx} \Delta F_y^0 - \alpha_{zy} \Delta F_x^0) + 2(1 - \nu)(1 - 2\nu) [(\Delta F_x^0)^2 + (\Delta F_y^0)^2] - \\ &\quad - \Delta(F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^0{}^2) + F_{xx}^0 \Delta F_{yy}^0 + F_{yy}^0 \Delta F_{xx}^0 - 2F_{xy}^0 \Delta F_{xy}^0 \}. \end{aligned} \quad (75)$$



Die Berechnung der  $\varepsilon_{kl}^0$  nach Gl. (54) ergibt

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^0 &= [L(1+\nu)^2 + 2M] (\Delta F^0)^2 - 2M(F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{02}) + [-2M(1+\nu) + N\nu] F_{xx}^0 \Delta F^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 &= [L(1+\nu)^2 + 2M] (\Delta F^0)^2 - 2M(F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{02}) + [-2M(1+\nu) + N\nu] F_{yy}^0 \Delta F^0 \\ \varepsilon_{zz}^0 &= [L(1+\nu)^2 + 2M\nu^2] (\Delta F^0)^2 - (2M - N) (F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{02}) \\ \varepsilon_{xy}^0 &= [-2M(1+\nu) + N\nu] F_{xy}^0 \Delta F^0 \\ \varepsilon_{xz}^0 &= \varepsilon_{yz}^0 = 0\end{aligned}\quad (76)$$

und der in Gl. (59''') benötigte Ausdruck

$$P \equiv \partial_{yy} \varepsilon_{xx}^0 + \partial_{xx} \varepsilon_{yy}^0 - 2\partial_{xy} \varepsilon_{xy}^0 + \nu \Delta \varepsilon_{zz}^0 \quad (77)$$

berechnet sich zu

$$\begin{aligned}P &= [L(1+\nu)^3 + 2M(1+\nu^3)] \Delta (\Delta F^0)^2 - \\ &- [2M(1+\nu) - N\nu] [\Delta (F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{02}) + F_{xx}^0 \Delta F_{yy}^0 + F_{yy}^0 \Delta F_{xx}^0 - 2F_{xy}^0 \Delta F_{xy}^0].\end{aligned}\quad (78)$$

Hiernach erhalten wir für das Gleichungssystem (59)

$$\sigma_{zz}^1 = \nu \Delta F^1 - 2G(1+\nu) \{ [L(1+\nu)^2 + 2M\nu^2] (\Delta F^0)^2 - (2M - N) (F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{02}) \}, \quad (79')$$

$$\Delta \Phi^1 = 0, \quad (79'')$$

$$\begin{aligned}\Delta \Delta F^1 &= - \frac{2G}{1-\nu} \{ C_1 (\alpha_{zx} \Delta F_y^0 - \alpha_{zy} \Delta F_x^0) + C_2 [(\Delta F_x^0)^2 + (\Delta F_y^0)^2] + \\ &+ C_3 \Delta (F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{02}) + C_4 (F_{xx}^0 \Delta F_{yy}^0 + F_{yy}^0 \Delta F_{xx}^0 - 2F_{xy}^0 \Delta F_{xy}^0) + C_5 \Delta (\Delta F^0)^2 \} \quad (79''')$$

mit

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{1-2\nu}{2G}, \quad C_2 = \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{4G^2}, \quad C_3 = -2M(1+\nu) + N\nu - 1/8G^2, \\ C_4 &= -2M(1+\nu) + N\nu + 1/8G^2, \quad C_5 = L(1+\nu)^3 + 2M(1+\nu^3).\end{aligned}\quad (80)$$

Als Beispiel für die Lösung dieses Gleichungssystems behandeln wir die singuläre Stufenversetzung in der  $z$ -Achse mit Burgers-Vektor in  $x$ -Richtung, also  $\alpha_{zx} = b\delta(\varrho)$ . Die Airysche Spannungsfunktion der linearen Näherung ist dann nach KOEHLER ([30], [6], S. 74)

$$F^0 = A y \ln \varrho, \quad A \equiv - \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)}. \quad (81)$$

Damit wird aus Gl. (79''') (das Glied mit  $\alpha_{zx}$  in (79''') gibt zu  $F^1$  keinen Beitrag, s. Anhang)

$$\begin{aligned}\Delta \Delta F^1 &= 8 \left( B + 2C \frac{x^2 - y^2}{\varrho^2} \right) / \varrho^4 \\ B &= - \frac{GA^2}{1-\nu} \left[ \frac{3-6\nu+4\nu^2}{8G^2} + 2L(1+\nu)^3 + 2M(1+\nu)(1-2\nu+2\nu^2) + N\nu \right], \\ C &= - \frac{GA^2}{1-\nu} C_4 / 2.\end{aligned}\quad (82)$$

Die maßgebende Lösung ist

$$F^1 = \left( B \ln \varrho + C \frac{x^2 - y^2}{\varrho^2} \right) \ln \varrho, \quad (83)$$

und die Airysche Spannungsfunktion einer Stufenversetzung in der  $z$ -Achse mit Burgers-Vektor (Betrag  $b$ ) in  $x$ -Richtung wird in der quadratischen Näherung

$$(F = F^0 + F^1) \quad F = \left( A y + B \ln \varrho + C \frac{x^2 - y^2}{\varrho^2} \right) \ln \varrho. \quad (84)$$

Hierzu berechnet man nach Gl. (56'), (57') und (79') leicht die Komponenten des Spannungstensors zu

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= A \frac{y}{\varrho^2} \cdot \frac{3x^2 + y^2}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \left\{ \frac{(2B+C)x^4 + 2(B-5C)x^2y^2 + Cy^4}{\varrho^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-(B+2C)x^4 + 6Cx^2y^2 + By^4}{\varrho^4} \cdot 2 \ln \varrho \right\} \\ \sigma_{yy} &= -A \frac{y}{\varrho^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \left\{ \frac{-Cx^4 + 2(B+5C)x^2y^2 + (2B-C)y^4}{\varrho^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Bx^4 - 6Cx^2y^2 - (B-2C)y^4}{\varrho^4} \cdot 2 \ln \varrho \right\} \\ \sigma_{xy} &= -A \frac{x}{\varrho^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{\varrho^2} + \frac{2xy}{\varrho^4} \left\{ \frac{(B-3C)x^2 + (B+3C)y^2}{\varrho^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-B+2C)x^2 - (B+2C)y^2}{\varrho^2} \cdot 2 \ln \varrho \right\} \\ \sigma_{zz} &= 2A \nu y / \varrho^2 + \left[ D + \frac{x^2 - y^2}{\varrho^2} (E - 4C \nu \ln \varrho) \right] / \varrho^2 \\ D &\equiv 2 \{ B \nu - 2G A^2 (1 + \nu) [L(1 + \nu)^2 + 2M \nu^2] \} \\ E &\equiv 2G A^2 (1 + \nu) \{ 2 [L(1 + \nu)^2 + 2M \nu^2] - 2M + N \} \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (85)$$

In Zylinderkoordinaten ist

$$F = (A \varrho \sin \varphi + B \ln \varrho + C \cos 2\varphi) \ln \varrho. \quad (86)$$

Hierzu berechnet man mit

$$\sigma_{\varrho\varrho} = \frac{1}{\varrho^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\varrho} F_{\varrho}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = F_{\varrho\varrho}, \quad \sigma_{\varrho\varphi} = -\frac{1}{\varrho} F_{\varrho\varphi} + \frac{1}{\varrho^2} F_{\varphi} \quad (87)$$

leicht die Komponenten des Spannungstensors:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varrho\varrho} &= A(\sin \varphi) / \varrho + [2B \ln \varrho + C(\cos 2\varphi)(1 - 4 \ln \varrho)] / \varrho^2 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= A(\sin \varphi) / \varrho + [2B(1 - \ln \varrho) - C \cos 2\varphi] / \varrho^2 \\ \sigma_{\varrho\varphi} &= -A(\cos \varphi) / \varrho + 2C \frac{\sin 2\varphi}{\varrho^2} (1 - \ln \varrho) \\ \sigma_{zz} &= 2A \nu (\sin \varphi) / \varrho + [D + (\cos 2\varphi)(E - 4C \nu \ln \varrho)] / \varrho^2 \\ \sigma_{\varrho z} &= \sigma_{\varphi z} = 0. \end{aligned} \quad (88)$$

## § 7. Diskussion

In unserer Diskussion der nicht-linearen Elastizitätstheorie wollen wir zunächst darauf hinweisen, daß es, wie schon in der linearen Theorie, sowohl Fragestellungen gibt, die sich prinzipiell nicht allein mit der Methode des Verschiebungsfeldes bewältigen lassen, als auch Probleme, bei denen man mit der Methode der Spannungsfunktionen allein nicht auskommt. Zu ersteren gehören alle Probleme mit räumlich verletzten Kompatibilitätsbedingungen, zu letzteren alle Probleme mit Massenkraften ohne Potential.



Weiter gibt es Fragestellungen, die beiden Methoden zugänglich sind, bei denen jedoch eine Methode deutliche Vorteile bietet. Diese Bemerkung gilt auch für dreidimensionale Probleme. Entgegen früheren Vorstellungen kann man auch hier oft vorteilhaft mit Spannungsfunktionen arbeiten, seitdem das Summationsproblem der Eigenspannungen seine einfache Lösung mit Hilfe der Spannungsfunktionen gefunden hat ([25], [6], S. 55 ff.). Leider ist das dreidimensionale Randwertproblem bisher noch nicht allgemein mit Spannungsfunktionen gelöst worden, doch lassen die Erfolge bei der Behandlung des Summationsproblems auch hierfür Fortschritte erhoffen.

Allgemein kann man etwa sagen: Besteht bei einem bestimmten Problem ein Unterschied in bezug auf den zur Methode des Verschiebungsfeldes und der Spannungsfunktionen gehörigen Arbeitsaufwand, so verstärkt sich dieser Unterschied, wenn man zur quadratischen Näherung übergeht. Die Vorteile der einzelnen Methoden bleiben beim Übergang zu der höheren Näherung weitgehend erhalten.

Beispielsweise behandelt man ebene Randwertprobleme oft vorteilhaft mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion. Die Hauptvorteile sind

a) Die Spannungsfunktion hat als Skalar die volle Symmetrie des betreffenden Problems und ist deshalb im allgemeinen von relativ einfacher Form (vgl. unsere Beispiele in § 5 und § 6).

b) Man hat keine gekoppelten Differentialgleichungen oder Randbedingungen wie im Fall des Verschiebungsfeldes.

c) Das Problem läßt sich sehr übersichtlich als die Grundaufgabe der Bipotentialetheorie formulieren.

Beispielsweise liege das ebene Problem eines Körpers vor, der durch Randkräfte und Massenkräfte mit Potential  $U$  beansprucht sei. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten dann

$$\partial_i(\sigma_{ij} - U \delta_{ij}) = 0. \quad (89)$$

Der Spannungsfunktionsansatz ( $\varrho$  = Massendichte)

$$\sigma_{xx} = F_{yy}^0 + \varrho U, \quad \sigma_{yy} = F_{xx}^0 + \varrho U, \quad \sigma_{xy} = -F_{xy}^0 \quad (90)$$

führt dann in bekannter Weise auf die Gleichung ([31], S. 191)

$$\Delta \Delta F^0 = f(U) \equiv -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \varrho \Delta U, \quad (91)$$

wo  $f$  mit  $U$  als gegebene Funktion anzusehen ist. Die Randbedingungen lassen sich bekanntlich in der Form

$$F^0 = g(s), \quad \partial F^0 / \partial n = h(s) \quad (92)$$

schreiben, wo  $g(s)$ ,  $h(s)$  als gegebene Funktionen auf dem Rand anzusehen sind. Die Gln. (91) und (92) definieren das Standardproblem der Bipotentialetheorie, das hinreichend ausführlich im Schrifttum behandelt worden ist [7], [32]. Die Lösung dieses Problems liefert die Spannungsfunktion der linearen Näherung  $F^0$ .

Den Formeln des § 6 entnimmt man, daß jedes Problem, dessen lineare Lösung durch eine Airysche Spannungsfunktion beschrieben wird, auch in der quadratischen Näherung noch durch eine Airysche Funktion allein dargestellt werden

kann. (Das Entsprechende gilt nicht für die Spannungsfunktion der Torsion, vgl. § 5.)

Nach Aufsuchen der linearen Näherung läßt sich nun leicht zur quadratischen Näherung übergehen. Wir schreiben

$$\Delta \Delta F^1 = f'(F^0) \quad (93)$$

und können  $f'(F^0)$  nunmehr als gegebene Funktion ansehen. Die jetzt zu erfüllenden Randbedingungen sind offenbar

$$F^1 = 0, \quad \partial F^1 / \partial n = 0. \quad (94)$$

Wir haben also, um die quadratische Näherung zu erhalten, noch einmal ein Standardproblem der Bipotentialtheorie zu lösen, wobei man sich weitgehend der Zwischenergebnisse der linearen Rechnung bedienen kann (Greensche Funktion, Matrixelemente bei Reihenentwicklung von  $F$  usw.).

Man könnte die Aufgabe auch mit Hilfe des Verschiebungsfeldes angreifen und würde auch hier zweimal ein Grundproblem zu lösen haben. Diese Bemerkung zeigt deutlich, daß sich der Vorteil einer bestimmten Methode in der linearen Theorie beim Übergang zur quadratischen Theorie verstärkt.

Die in § 5 und § 6 mit Hilfe der Spannungsfunktionen gelösten Probleme der singulären Schrauben- und Stufenversetzung sind etwa gleichzeitig auch von SEEGER und MANN [4] und von SEEGER und BUCK [5] mit Hilfe der Verschiebungen behandelt worden. Der Vergleich der beiden Methoden zeigt insbesondere bei der Stufenversetzung klar, daß im Falle von Versetzungen die Spannungsfunktionen das geeignete Hilfsmittel darstellen.

Wir hätten auf Grund der Gln. (65) und (79) ohne größeren Aufwand auch manche Probleme mit stetig verteilten Schraubenversetzungen  $\alpha_{zx}(x, y)$  oder Stufenversetzungen  $\alpha_{zx}(x, y)$ ,  $\alpha_{zy}(x, y)$  behandeln können. Diese Probleme entziehen sich aus den obengenannten Gründen einer Behandlung mit Hilfe der Verschiebungen. In diesem Zusammenhang erscheint es sehr wünschenswert, für die Spannungsfunktionen eine einfache physikalische Deutung zu haben. Der Grundgedanke unserer Theorie war die Vorstellung des nicht-Euklidischen natürlichen Zustands. Diese läßt eine von SCHAEFER [16] gegebene Deutung der Spannungsfunktionen als besonders passend empfinden: Die Spannungsfunktionen werden als diejenigen Reaktionen (im Sinne von LAGRANGE) angesehen, welche das Medium im Euklidischen Raum festhalten, also seine Entspannung in den natürlichen Zustand verhindern.

Es erscheint uns weiterhin für viele Probleme ein Vorzug der hier beschriebenen Methode zu sein, daß sie durchgehend mit den Koordinaten des deformierten Zustands arbeitet [33], [28]. Tatsächlich wird in den weitaus meisten Problemen die Beanspruchung des Körpers als Funktion im deformierten Zustand gegeben sein, und in diesen Fällen ist eine Beschreibung des physikalischen Sachverhalts in den Koordinaten des deformierten Zustands unbedingt erstrebenswert. Nicht nur die physikalische Interpretation der berechneten Größen (etwa Spannungen) wird so einfacher, sondern auch die ganze Rechnung. So konnten wir z. B. auf die Jakobische Matrix, die in der Murnaghanschen Theorie [1] eine so wichtige Rolle spielt, bei unseren Rechnungen vollkommen verzichten.



Interessante Möglichkeiten ergeben sich weiterhin für die Behandlung der Temperaturspannungen, magneto- und elektrostriktiven Spannungen sowie der Konzentrationsspannungen. Diesen Fällen ist gemeinsam, daß man als Ursache der Spannungen eine spannungsfreie, sog. quasiplastische (oder eingeprägte) Deformation  $\varepsilon_{kl}^P$  ansehen kann, welche dadurch, daß sie im Euklidischen Raum nicht ungehindert vonstatten gehen kann, zu gleichzeitigen elastischen Deformationen  $\varepsilon_k$  und Spannungen  $\sigma_{ij}$  führt. Wäre der Zwang, im Euklidischen Raum zu verbleiben, nicht vorhanden, so würde der Körper nach Anlegen etwa des Temperaturfeldes sich spannungsfrei in den nicht-Euklidischen Raum begeben. Der so erhaltene nicht-Euklidische Zustand des Mediums spielt für die weiteren Überlegungen die Rolle des natürlichen Zustands der früheren Paragraphen.

Bezeichnen wir den Abstand zweier Punkte, deren gegenseitige Lage im deformierten Zustand durch  $dx^k$  gekennzeichnet ist, im undeformierten Medium (gemeint ist, vor Anlegen des Temperaturfeldes etc.) mit  $ds_u$ , denjenigen derselben Punkte im nicht-Euklidischen und im deformierten Zustand wie früher durch  $ds_0$  bzw.  $ds$ , die zugehörigen Metrikensoren mit  $b_{kl}, g_{kl}, a_{kl}$ , so ist offenbar der Eulersche Tensor  $\varepsilon_{kl}^P$  der quasiplastischen Deformation durch

$$ds_0^2 - ds_u^2 = 2\varepsilon_{kl}^P dx^k dx^l, \quad (95)$$

derjenige der elastischen Deformation  $\varepsilon_{kl}$  durch

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{kl} dx^k dx^l \quad (96)$$

zu definieren. Addition der beiden Gleichungen gibt

$$ds^2 - ds_u^2 = 2\varepsilon_{kl}^G dx^k dx^l \quad (97)$$

mit der Gesamtdeformation

$$\varepsilon_{kl}^G = \varepsilon_{kl}^P + \varepsilon_{kl}. \quad (98)$$

Da diese Euklidisch ist, verschwindet der zugehörige Riemannsche Krümmungstensor, dies liefert die Grundgleichungen für die Spannungsbestimmung zu

$$\frac{1}{2} \{ \varepsilon^{jnm} \varepsilon^{ilk} [V_n \Gamma_{m lk} - g^{pq} \Gamma_{n k q} \Gamma_{m l p}] \}_{(ij)} = 0, \quad (99)$$

wo jetzt jedoch

$$\Gamma_{m lk} = -2(\varepsilon_{m lk}^P + \varepsilon_{m lk}) \quad (100)$$

zu setzen ist.  $\varepsilon_{m lk}^P$  folgt im allgemeinen leicht aus den physikalischen Gegebenheiten des Problems, z.B. ist bei gegebenem Temperaturfeld und einem Ausdehnungsgesetz

$$\frac{V - V_0}{V} = 3f(T) \quad (101)$$

mit  $V_0, V$  als Anfangs- bzw. Endvolumen eines Massenelements

$$\varepsilon_{kl}^P = [f(T) - \frac{1}{2}f(T)^2] \delta_{kl}. \quad (102)$$

Man erhält dieses Ergebnis leicht, wenn man mit den einer räumlich homogenen Ausdehnung (101) entsprechenden Verschiebungen  $u_k^P = x_k f(T)$  in die (nicht-linearen) Gleichungen für den Zusammenhang zwischen Verschiebungen und

Deformationen ([2], S. 299)

$$2\varepsilon_{kl}^P = \partial_k u_l^P + \partial_l u_k^P - (\partial_k u_i^P)(\partial_l u_i^P) \quad (103)$$

eingeht.

Offenbar ist es sinnvoll, nach Vergleich mit Gl. (23)  $-2\varepsilon_{m1k}^P \equiv h_{(m1)k}^P$  oder, nach Gl. (34), weil  $h_{[m1]k}$  in Gl. (28) nichts beiträgt,

$$\varepsilon^{n1k} \nabla_l \varepsilon_{km}^P \equiv -\alpha^{Pn}_{.m} \quad (104)$$

als eine „Quasiversetzungsdichte“ und diese als Ursprung der Spannungen anzusehen. Diese Spannungen sind dann aus der Versetzungsdichte (103) wie die Eigenspannungen einer gewöhnlichen Versetzungsdichte zu bestimmen. Bemerkenswert ist, daß sich die Quasiversetzungsdichte im allgemeinen sofort als lokal ergibt, weshalb hier die Methode der Spannungsfunktionen derjenigen des Verschiebungsfeldes, die meist in den Anfangskordinaten arbeitet, vorzuziehen ist.

Der Begriff der Quasiversetzungen ist sehr nützlich z.B. bei vielen Problemen der Metallkunde ([6], S. 32ff.). Hier entstehen beim Abschrecken von Werkstoffproben starke Temperaturspannungen. Die in dem Medium vorhandenen (und eventuell neu zu bildenden) beweglichen Gitterversetzungen werden sich dann in jedem Moment so anzuordnen suchen, daß sie die Quasiversetzungen der Temperaturverteilung möglichst weitgehend kompensieren. Dabei geben die Gitterversetzungen einer Schubspannung bei nicht zu hohen Temperaturen viel leichter nach (durch Gleiten) als einer hydrostatischen Spannung (durch Klettern). Dies ist der Grund dafür, daß man keine sehr starken makroskopisch variierenden Schubspannungen (sog. Spannungen 1. Art) in einem gewöhnlichen Festkörper anbringen kann (weder als Lastspannungen noch als Eigenspannungen); diese gleichen sich durch Nachgeben der Versetzungen, d.h. durch plastische Verformung, weitgehend aus. Für Schubspannungen wird daher die Elastizitätstheorie 2. Ordnung hauptsächlich im Falle von mikroskopischen Spannungen (Spannungen 3. Art) benötigt werden, also insbesondere für die Spannungen in der Umgebung einzelner Gitterfehler.

Dagegen können sich starke makroskopische hydrostatische Spannungen bei nicht zu hohen Temperaturen sehr leicht ausbilden, sie sind besonders einfach durch Temperatur- und Konzentrationsschwankungen zu realisieren. Sie können so weit gesteigert werden, daß Rißbildung eintritt. Der Nutzen der nicht-linearen Elastizitätstheorie bei der Behandlung solcher Probleme liegt auf der Hand.

Die Verfasser freuen sich, die vorliegende Arbeit ihrem verehrten Lehrer, Herrn Professor R. GRAMMEL, dem sie die erste Einführung in die Mechanik und angewandte Mathematik verdanken, zu seinem siebzigsten Geburtstag widmen zu können. Ferner möchten sie Herrn Professor E. FUES und Herrn Professor U. DEHLINGER für ihr Interesse herzlich danken.

### Anhang

a) Wir stellen hier den Zusammenhang zwischen den von MURNAGHAN in [28] benützten Elastizitätskonstanten dritter Ordnung  $l, m, n$  und den von uns benützten Konstanten  $L, M, N$  her. Bei der ganzen Rechnung lassen wir Terme, die in  $\sigma_{ij}$  oder  $\varepsilon_{kl}$  von höherem als zweitem Grad sind, konsequent weg. Wir



benützen etwa die aus den Gln. (54) leicht abzuleitenden Beziehungen

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{I}} &= \frac{1}{3K} \sigma_{\text{I}} + (3L + 2M) \sigma_{\text{I}}^2 + (N - 6M) \sigma_{\text{II}} \\ \varepsilon_{\text{II}} &= \frac{1}{4G^2} \left( \sigma_{\text{II}} - \frac{9K^2 - 4G^2}{27K^2} \sigma_{\text{I}}^2 \right) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy} + 2M \sigma_{\text{I}} \sigma_{xy} + N (\sigma_{xz} \sigma_{yz} - \sigma_{zz} \sigma_{xy}),\end{aligned}$$

wo

$$K \equiv \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$$

der Kompressionsmodul ist. Damit gehen wir in die nach MURNAGHAN folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{I}} &= 3K \varepsilon_{\text{I}} + (3l + 2m) \varepsilon_{\text{I}}^2 + (n - 6m) \varepsilon_{\text{II}} \\ \sigma_{xy} &= 2G \varepsilon_{xy} + 2m \varepsilon_{\text{I}} \varepsilon_{xy} + n (\varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz} - \varepsilon_{zz} \varepsilon_{xy})\end{aligned}$$

ein (für  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  und  $\varepsilon_{zz}$  setzen wir  $\sigma_{xz}/2G$ ,  $\sigma_{yz}/2G$  und  $(\sigma_{zz} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{\text{I}})/2G$ , da diese Größen nur in quadratischen Termen vorkommen). So erhalten wir

$$\begin{aligned}9L + N &= -(9l + n)/27K^3 \\ 6M - N &= -(6m - n)/12KG^2 \\ N &= -n/8G^3.\end{aligned}$$

Die Konstanten  $l, m, n$  verbinden, ebenso wie die  $L, M, N$ , die in den Endkoordinaten genommenen (d.h. Eulerschen) Spannungen und Deformationen. Wegen des Zusammenhangs der  $l, m, n$ , mit den in MURNAGHANs Buch [1] benützten, sich auf die Lagrangeschen Spannungen und Deformationen beziehenden Konstanten, die von MURNAGHAN ebenfalls mit  $l, m, n$  bezeichnet wurden, vgl. SEEGER und MANN [4].

b) Wir zeigen, daß der Anteil mit  $\alpha_{zx}$  und  $\alpha_{zy}$  auf der rechten Seite von Gl. (79''') zu  $F^1$  im Falle der singulären Versetzung  $\alpha_{zx} = b \delta(\varrho)$ ,  $\alpha_{zy} = 0$  nichts beiträgt. Wegen  $F^0 \sim \gamma \ln \varrho$  ist  $\Delta F^0 \sim \gamma/\varrho^2$  und  $\Delta F_y^0 \sim (x^2 - y^2)/\varrho^4 = (\cos 2\varphi)/\varrho^2$ . Eine Partikularlösung der Gleichung

$$\Delta \Delta F^1 \sim (\cos 2\varphi) \delta(\varrho)/\varrho^2$$

ist

$$F^1(\varrho, \varphi) \sim \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos 2\varphi' \int_0^\infty d\varrho' r \delta(\varrho')/\varrho', \quad r^2 \equiv \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi + \varphi'),$$

integriert über den ganzen Wertebereich von  $\varrho'$  und  $\varphi'$ . Die Integration über  $\varrho'$  ergibt

$$F^1(\varrho, \varphi) \sim \int_0^{2\pi} d\varphi' (\cos 2\varphi') \left[ \frac{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi + \varphi')}}{\varrho'} \right]_{\varrho'=0}.$$

Dieses Integral verschwindet aber offensichtlich für sämtliche Werte von  $\varrho$  und  $\varphi$ .

## Literatur

- [1] MURNAGHAN, F. D.: Finite deformation of an elastic solid. New York: J. Wiley & Sons; London: Chapman & Hall 1951.
- [2] SOKOLNIKOFF, I. S.: Tensor Analysis. New York: J. Wiley & Sons; London: Chapman & Hall 1951.
- [3] TRUESDELL, C.: The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics. *J. Rat. Mech. Anal.* **1**, 125—300 (1952).
- [4] SEEGER, A., u. E. MANN: Anwendung der nicht-linearen Elastizitätstheorie auf Fehlstellen in Kristallen. *Z. Naturforsch.* **14a**, 154 (1959).
- [5] SEEGER, A., u. O. BUCK: Unveröffentlichte Untersuchungen.
- [6] KRÖNER, E.: Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Erg. angew. Math.* **5**, 1—179 (1958).
- [7] BIEZENO, C. B., u. R. GRAMMEL: Technische Dynamik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1953.
- [8] KONDO, K.: On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding. *Proc. 2. Japan nat. Congress of appl. mech.* 1952, S. 41—47.
- [9] KONDO, K.: Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering sciences by means of geometry, Vol. I. Tokyo: Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai 1955.
- [10] BILBY, B. A.: Types of dislocation source. Defects in crystalline solids. Report of 1954 Bristol conference, S. 123—133. London: The Physical Society 1955.
- [11] BILBY, B. A., R. BULLOUGH & E. SMITH: Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry. *Proc. roy. soc. London, Ser. A* **231**, 263—273 (1955).
- [12] BILBY, B. A., & E. SMITH: Continuous distributions of dislocations III. *Proc. roy. soc. London, Ser. A* **236**, 481—505 (1956).
- [13] BILBY, B. A., L. R. T. GAROFALO & A. N. STROH: Continuous distributions of dislocations and the theory of plasticity. *Extrait des actes du IX<sup>e</sup> congrès international de mécanique appliquée*, Brüssel 1957, S. 35—44.
- [14] SCHOUTEN, J. A.: Ricci-Calculus. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954.
- [15] MCCONNELL, A. J.: Applications of the absolute differential calculus. London: Blackie 1936.
- [16] SCHAEFER, H.: Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers. *Z. angew. Math. Mech.* **33**, 356—362 (1953).
- [17] KOPPE, E.: Systematische Darstellung des gegenwärtigen Standes der Elastizitätstheorie endlicher Verformungen. Göttingen, Diplomarbeit 1953.
- [18] SCHRÖDINGER, E.: Space-Time Structure. Cambridge: University Press 1954.
- [19] CARTAN, E.: Leçons sur la géométrie des espaces de RIEMANN. Paris: Gauthier-Villars 1928.
- [20] NYE, J. F.: Some geometrical relations in dislocated crystals. *Acta metallurgica* **1**, 153—162 (1953).
- [21] ESHELBY, J. D.: The continuum theory of lattice defects. *Solid state Physics*, III, S. 79—144. New York: Acad. Press Inc. Publ. 1956.
- [22] FRANK, F. C.: Crystal dislocations—Elementary concepts and definitions. *Philos. Mag., Ser. VII* **42**, 809—819 (1951).
- [23] SEEGER, A.: Theorie der Gitterfehlstellen. *Handbuch der Physik*, VII/1, S. 383 bis 665. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.
- [24] KRÖNER, E.: Der fundamentale Zusammenhang zwischen Versetzungsdichte und Spannungsfunktionen. *Z. Physik* **142**, 463—475 (1955).
- [25] KRÖNER, E.: Die Spannungsfunktionen der dreidimensionalen isotropen Elastizitätstheorie. *Z. Physik* **139**, 175—188 (1954). Berichtigung: *Z. Physik* **143**, 374 (1955).
- [26] MARGUERRE, K.: Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. *Z. angew. Math. Mech.* **35**, 242—263 (1955).
- [27] KRÖNER, E.: Dislocations and the Biot-Savart law. *Proc. phys. soc., sect. A* **68**, 53—55 (1955).



- [28] MURNAGHAN, F. D.: Finite deformations of an elastic solid. Amer. J. Math. **59**, 235—260 (1937).
- [29] ESHELBY, J. D.: Screw dislocations in thin rods. J. appl. phys. **24**, 176—179 (1953).
- [30] KOEHLER, J. S.: On the dislocation theory of plastic deformation. Phys. Review, Ser. II **60**, 397—410 (1941).
- [31] GREEN, A. E., & W. ZERNA: Theoretical elasticity. Oxford: Clarendon Press 1954.
- [32] FRANK, P., u. R. v. MISES: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. 1. Braunschweig: Vieweg & Sohn 1930.
- [33] SETH, B. R.: Finite strain in elastic solids. Phil. Trans. roy. soc. London, Ser. A **234**, 231—264 (1935).

Institut für theoretische und angewandte Physik  
Technische Hochschule Stuttgart  
und  
Max-Planck-Institut für Metallforschung  
Stuttgart

(*Eingegangen am 7. Januar 1959*)

# *A Note on the Existence of Periodic Solutions of the Navier-Stokes Equations*

JAMES SERRIN

*Communicated by C. TRUESDELL*

In an earlier paper [1] I established the stability of solutions of the Navier-Stokes equations provided that a certain Reynolds number was small enough. This result enables one to deduce from certain plausible hypotheses the existence of stable periodic solutions of the Navier-Stokes equations. In particular we shall prove the following result:

*Let  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$  be a bounded region in space, and let a flow velocity be prescribed at each point of the boundary of  $\mathcal{V}$ . Assume furthermore that both  $\mathcal{V}$  and the assigned velocities depend periodically on the time  $t$ . Then, under conditions 1° and 2° stated below, there exists a unique, stable, periodic solution of the Navier-Stokes equations in  $\mathcal{V}$  which takes on the prescribed on the boundary of  $\mathcal{V}$ .*

In view of condition 2° (see below) it is necessary that the boundary conditions be compatible with a flow of Reynolds number less than 5.7. The theorem may therefore be paraphrased by the statement that corresponding to sufficiently low assigned periodic velocities there exists a periodic flow to which every other motion eventually subsides. A simple example would be a fluid enclosed in a fixed container and stirred by a low speed bladed rotor.

Another case of interest occurs when the assigned conditions are *steady*. Then the theorem asserts the existence of a unique, stable, time-independent solution of the Navier-Stokes equations taking on the prescribed velocities on the boundary of  $\mathcal{V}$ . In several long papers (e.g. [2]–[5]) the existence of steady flows has been proved independently of conditions 1° and 2°, though in these cases a considerable degree of smoothness has been required of the boundary data. Needless to say, the flows thus obtained may be neither stable nor unique, unless their Reynolds numbers are low enough.

We now state conditions 1° and 2° envisaged in the above theorem and remarks.

1°. *To every continuous initial distribution of velocities over  $\mathcal{V}$  there corresponds a solution of the Navier-Stokes equations satisfying the prescribed boundary conditions.*

2°. *There is one solution whose Reynolds number  $Re \equiv Vd/\nu$  is less than 5.7. (Here  $V$  is the maximum speed of the flow during the whole time interval  $0 \leq t < \infty$ ,  $d$  is the maximum diameter of  $\mathcal{V}$ , and  $\nu$  is the kinematic viscosity.) This solution is equicontinuous in  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  for all  $t$ .*

Before proceeding to the proof of the theorem there are several remarks to be made. First, it is understood that the flows guaranteed by Condition 1° should be valid for all  $t \geq 0$ . Though this is mathematically a very stringent requirement, it is nevertheless quite plausible on the grounds of physical intuition and our knowledge of the behavior of other parabolic systems; moreover, from the proof it will be clear that 1° need hold only for initial velocity distributions whose Reynolds numbers are less than 5.7. Second, the number 5.7 in Condition 2° may possibly be improved, as will be apparent from the proof. Finally, the author wishes to make it clear that he does not consider the above theorem to be equivalent to the usual kind of mathematical existence theorem: it is agreed that for certain types of boundary behavior 1° and 2° might not hold, and that (correspondingly) the limits of application of the theorem are not well-defined. On the other hand, in view of the plausibility of 1° and 2° there is every reason to expect that they will be proved in the future, subject to sufficiently smooth boundary conditions<sup>1</sup>, and once such proofs are given the existence of periodic solutions indisputably follows.

Now let  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  be the velocity vector of the flow guaranteed by Condition 2°, and suppose the assigned boundary conditions have period 1. We consider the sequence of vector fields

$$\boldsymbol{\varphi}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

This sequence is bounded and equicontinuous by hypothesis, hence by the theorem of Arzela contains a *subsequence* which converges uniformly to a vector  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ . We assert that actually the whole sequence converges to  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ .

Indeed, if this were not the case we could find another subsequence converging to a vector  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$  different from  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ . But this is impossible, as we shall now show. For positive integers  $m$  and  $n$ , ( $m > n$ ), set

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t + m - n), \quad t \geq 0.$$

Then obviously  $\mathbf{v}'$  is a solution of the Navier-Stokes equations, and, according to the periodicity assumption, it satisfies the assigned boundary conditions. Now for any vector  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , let  $\mathcal{K}(\mathbf{f})$  be defined by

$$\mathcal{K}(\mathbf{f}) \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}(t)} |\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{v}.$$

Then by Theorem 1 of [I] we have

$$\mathcal{K}(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \leq \mathcal{K}_0 e^{-\varepsilon t}, \quad (1)$$

where  $\mathcal{K}_0$  denotes the value of  $\mathcal{K}(\mathbf{v}' - \mathbf{v})$  at  $t = 0$ , and

$$\varepsilon = \frac{1}{\nu} (\alpha \nu^2 / d^2 - V^2) > 0$$

since  $\text{Re}[\nu] \leq 5.7$ . Because  $\mathbf{v}'$  as well as  $\mathbf{v}$  satisfies  $\text{Re} \leq 5.7$ , it is seen that

$$\mathcal{K}_0 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_0} (2V)^2 d\mathbf{v} \leq 2d^3 V^2 = \text{Const.}$$

Setting  $t = n$  in (1) yields

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\varphi}_m - \boldsymbol{\varphi}_n) \leq \text{Const. } e^{-\varepsilon n}, \quad (2)$$

<sup>1</sup> Similar theorems are already known, cf. the papers of LERAY and KISELEV & LADYSHENSKAYA cited in the references.



and it follows that

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \mathcal{K}(\varphi_m - \varphi_n) = 0 \quad (3)$$

(the region of integration in (2) and (3) is, of course,  $\mathcal{V}(n) \equiv \mathcal{V}_0$ ). Now letting  $m$  and  $n$  tend to infinity through sequences of integers such that  $\varphi_m \rightarrow \psi$ ,  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  gives an immediate contradiction. This proves that  $\lim \varphi_n(x) = \varphi(x)$ .

By condition 1° there exists a flow  $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^*(x, t)$  such that  $\mathbf{v}^*(x, 0) = \varphi(x)$ . We assert that  $\mathbf{v}^*$  is a *periodic* solution of the Navier-Stokes equation. For set  $\mathbf{v}''(x, t) = \mathbf{v}(x, t + n)$ . Then we have, in the same way as inequality (1),

$$\mathcal{K}(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}'') \leq \mathcal{K}_0 e^{-\varepsilon t}, \quad (4)$$

where  $\varepsilon$  has the same meaning as before, and  $\mathcal{K}_0$  is the value of  $\mathcal{K}(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}'')$  when  $t = 0$ , that is  $\mathcal{K}_0 \equiv \mathcal{K}(\varphi - \varphi_n)$ . Putting  $t = 1$  in (4) yields

$$\mathcal{K}[\mathbf{v}^*(x, 1) - \varphi_{n+1}(x)] < \mathcal{K}(\varphi - \varphi_n)$$

and letting  $n \rightarrow \infty$  gives, finally,

$$\mathcal{K}[\mathbf{v}^*(x, 1) - \varphi(x)] = 0.$$

It follows that  $\mathbf{v}^*(x, 1) = \varphi(x) = \mathbf{v}^*(x, 0)$ , that is,  $\mathbf{v}^*$  is periodic.

To complete the proof of the theorem it is enough to show that  $\text{Re}[\mathbf{v}^*] \leq 5.7$ , for then by [1]  $\mathbf{v}^*$  is stable and unique<sup>2</sup>. But we have

$$\mathcal{K}(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty, \quad (5)$$

by virtue of Theorem 1 of [1]. Since both  $\mathbf{v}$  and  $\mathbf{v}^*$  are equicontinuous, (5) implies  $(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ , and therefore

$$\text{Max}_x \mathbf{v}^*(x, t) \leq V + o(t).$$

$\mathbf{v}^*$  being periodic, this in turn proves  $V^* \leq V$  and  $\text{Re}[\mathbf{v}^*] \leq 5.7$ .

**Note:** This research was supported in part by the United States Air Force Office of Scientific Research under Contract AF 49 (638)–262.

### References

- [1] SERRIN, J.: On the stability of viscous fluid motions. Arch. Rational Mech. Anal. **3**, 1–13 (1959).
- [2] LERAY, J.: Étude de diverses équations intégrales nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. J. Math. Pures Appl. (9) **12**, 1–82 (1933).
- [3] LERAY, J.: Essai sur les mouvements plan d'un liquide visqueux que limitent des parois. J. Math. Pures Appl. (9) **13**, 331–418 (1934).
- [4] LERAY, J.: Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace. Acta Math. **63**, 193–248 (1934).
- [5] KISELEV, A. A., & O. A. LADYSHENSKAYA: On the existence and uniqueness of solutions of the initial value problem for viscous incompressible fluids. Izvestia Akad. Nauk SSSR. **21**, 655–670 (1957).

<sup>2</sup> That  $\mathbf{v}^*$  is stable follows from Theorem 1; that it is unique can be shown by the same argument used to prove Theorem 2.

University of Minnesota  
Minneapolis, Minnesota

(Received December 3, 1958)

# *The Evaluation of Collision Integrals, using Grad's Representation of the Distribution Function*

E. IKENBERRY

*Communicated by C. TRUESDELL*

## I. Introduction

In the paper in which GRAD [3] developed his thirteen moment approximation to the velocity distribution function for a rarefied gas he utilized certain Hermite polynomials whose properties he developed in a companion paper [4]. The Hermite polynomials, which are components of tensors defined by

$$H^{(n)}(\mathbf{x}) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}\mathbf{x}^2} \nabla^n e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2}, \quad (1.1)$$

are of total degree  $n$  in the three components  $x_1, x_2, x_3$  of  $\mathbf{x}$ . The first few polynomials, as given by GRAD [4, eq. (14)], are

$$\begin{aligned} H^{(0)} &= 1, \\ H_i^{(1)} &= x_i, \\ H_{ij}^{(2)} &= x_i x_j - \delta_{ij}, \\ H_{ijk}^{(3)} &= x_i x_j x_k - (x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ki} + x_k \delta_{ij}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Since only these are needed in his thirteen moment approximation, GRAD computed the collision integral, which appears as the right hand member of the Maxwell-Boltzmann equation in its customary form, only for the above, obtaining by a lengthy development results exact for Maxwellian molecules and correct to third order terms for arbitrary molecular models. GRAD makes extensive use of a tensor notation which is not required in the present paper. Our definitions of the Hermite polynomials are equivalent to GRAD's, although our work on the collision integral (Sections V and VI) is in the notation used by IKENBERRY & TRUESDELL [7].

Products of  $3N$  one-dimensional Hermite polynomials were used by IKENBERRY [5, 6] in a series representation of the distribution function in phase space.

In this paper we wish to show how exact expressions for the collision integrals for any spherically symmetrical model may be obtained. We effect all integrations except those over the relative speed  $2v$  and the scattering angle  $\Phi$ . For inverse power molecules, the integration over the relative speed will be effected. For rigid elastic spheres, all integrations will be effected.

## II. The Hermite Polynomials

GRAD's Hermite polynomials of degree  $n$  in three variables  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  may be defined by the polynomial identity

$$(-1)^n e^{\frac{1}{2}\mathbf{x}^2} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^n e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2} = n! \sum_{\mathbf{i}} \frac{H_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) \mathbf{r}^{\mathbf{i}}}{\mathbf{i}!} = H^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{x}), \quad (2.1)$$

where

$$\begin{aligned} x^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ \mathbf{r} \cdot \nabla &= r_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + r_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + r_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \mathbf{r}^{\mathbf{i}} &= r_1^{i_1} r_2^{i_2} r_3^{i_3}, \\ \mathbf{i}! &= i_1! i_2! i_3!, \end{aligned} \quad (2.2)$$

and the summation is over all partitions  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$  of  $n$  into non-negative integers. From (2.1) and the expression

$$(\mathbf{r} \cdot \nabla)^n = n! \sum_{\mathbf{i}} \frac{1}{\mathbf{i}!} \left( r_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{i_1} \left( r_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{i_2} \left( r_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^{i_3} \quad (2.3)$$

it is readily seen that the three-dimensional polynomials  $H_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})$  are actually products of three one-dimensional Hermite polynomials  $H_{i_j}(x_j)$ :

$$H_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) = H_{i_1}(x_1) H_{i_2}(x_2) H_{i_3}(x_3), \quad (2.4)$$

where

$$H_{i_j}(x_j) = (-1)^{i_j} e^{\frac{1}{2}x_j^2} \left( \frac{d}{dx_j} \right)^{i_j} e^{-\frac{1}{2}x_j^2}. \quad (2.5)$$

However, GRAD's contracted "Hermite" polynomials [3, eq. (5.6)] of degree  $n > 1$  are not products of one-dimensional polynomials. Following GRAD [3, p. 363], we shall consider any given contracted polynomial as a certain linear combination of polynomials of the form (2.4).

From (2.1) any number of the  $H^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{x})$  are readily obtained by noting that

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \cdot \nabla) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2} &= -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2}, \\ (\mathbf{r} \cdot \nabla) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) &= r^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

In order to obtain the few  $H_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})$  given in (1.2) we need only

$$\begin{aligned} H^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) &= 1, \\ H^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) = r_i x_i, \\ H^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x})^2 - r^2 = r_i r_j (x_i x_j - \delta_{ij}), \\ H^{(3)}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x})^3 - 3 r^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) = r_i r_j r_k (x_i x_j x_k - 3 x_i \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

In the right hand members of (2.7) the summation convention has been used. By symmetrizing the parenthesized expressions we obtain GRAD's polynomials (1.2).

Integral and recurrence relations between the polynomials are most easily derived by means of their generating function. To obtain this, we divide each member of (2.1) by  $n!$  and sum the resulting expressions over all non-negative



values of  $n$ . Quite readily we obtain the generating function

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{r}^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{i}=0}^{\infty} \frac{H_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) \mathbf{r}^{\mathbf{i}}}{\mathbf{i}!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{x})}{n!}. \quad (2.8)$$

The easily derived definite integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2} f(\mathbf{r}, \mathbf{x}) f(\mathbf{s}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} e^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}, \quad (2.9)$$

leads directly to the orthogonality and normalization relations for the  $H^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{x})$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2} H^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) H^{(m)}(\mathbf{s}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} n! (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})^n \delta_{n,m}. \quad (2.10)$$

Expanding the right hand member of this by the multinomial theorem (see (2.3)), and expressing the  $H^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{x})$  and  $H^{(m)}(\mathbf{s}, \mathbf{x})$  in the left hand member in terms of the  $H_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})$  by means of (2.1), we readily obtain the orthogonality and normalization relations for the  $H_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2} H_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) H_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \mathbf{i}! \delta_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \quad (2.11)$$

where  $\delta_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_3 j_3}$ .

### III. Representations of the Distribution Function

It will be assumed that, at least for some values of a non-negative parameter  $h = h(\mathbf{x}, t)$  there exists a uniformly convergent series representation [3, eq. (4.6)]

$$F = \frac{h^3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2}h^2 \mathbf{c}^2} \sum_{\mathbf{i}=0}^{\infty} \frac{b_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}, t)}{\mathbf{i}!} H_{\mathbf{i}}(h\mathbf{c}) \quad (3.1)$$

of the distribution function  $F = F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ . Here  $\boldsymbol{\xi}$  is the velocity of a molecule relative to some standard frame of reference that is the same for all molecules, and

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{C} \quad (3.2)$$

where  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$  is the velocity of a selected coordinate system for the molecule at  $\mathbf{x}$ . As a consequence of (2.11) and the assumed uniform convergence of the series in (3.1), we find readily that

$$b_{\mathbf{i}} \equiv b_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F H_{\mathbf{i}}(h\mathbf{c}) d\mathbf{c}. \quad (3.3)$$

The  $b_{\mathbf{i}}$  divided by the number density  $n$  give GRAD's  $a_{\mathbf{i}}$ . GRAD [3, eq. (4.11)] gives expressions, in terms of moments of  $F$  about the mean velocity  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ , for those  $a_{\mathbf{i}}$  for which  $i_1 + i_2 + i_3 = 0, 1, 2, 3$ , and 4, when  $\mathbf{C} = \bar{\boldsymbol{\xi}}$  and when  $h^2 = m/kT$ , where  $m$  is the mass of a molecule,  $k$  is the Boltzmann constant and  $T$  is the temperature. It is readily verified, as stated by GRAD [3, eq. (4.12)], that taking  $C_i = \bar{\xi}_i$  implies  $a_i = 0$ , and that taking  $h^2 = m/kT$  implies  $a_i^{(2)} = 0$ . The calculations of the present paper are made with no specification regarding  $\mathbf{C}$  and  $h^2$ .

### IV. The collision integral; Notation

Solution of the general initial value problem for the velocity distribution function  $F$  by the transport equation method involves calculation of the collision

integral

$$C(Q) = \int_{\infty} d\mathbf{c} \int_{\infty} d\mathbf{c}^* \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\infty} v b db \delta Q F F^* \quad (4.1)$$

for various polynomials  $Q = Q(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ . Of the permissible alternative forms for  $\delta Q$  we select

$$\delta Q = Q^{*'} + Q' - Q^* - Q, \quad (4.2)$$

which shows the invariance of  $C(Q)$  when  $\mathbf{c}^* \leftrightarrow \mathbf{c}$  and  $\mathbf{c}^{*'} \leftrightarrow \mathbf{c}'$ .

In the above and in the following developments we adhere closely to rather standard notations, in particular to the notation used by IKENBERRY & TRUESDELL [7], from whom we quote the following paragraph [7, p. 15] for the convenience of readers of the present paper:

"Quantities associated with the second of a pair of molecules are denoted by an asterisk; quantities associated with the outcome of an encounter, by primes; and the accents when attached to function symbols refer to their arguments:  $F' \equiv F(\xi')$ , etc. We set

$$2\mathbf{v} \equiv \xi^* - \xi = \mathbf{c}^* - \mathbf{c}, \quad 2\mathbf{w} \equiv \mathbf{c}^* + \mathbf{c}. \quad (3.1) \quad (4.3)$$

Conservation of momentum and energy requires  $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ ,  $v = v'$ . Let  $\varepsilon$  be the angle between the plane of  $\mathbf{v}$  and  $\mathbf{v}'$  and the plane containing  $\mathbf{v}$  and a direction fixed in space. Suppose  $\xi$  fixed; then all possible encounters will be included by letting  $\varepsilon$  increase from 0 to  $2\pi$ ; in this process  $\mathbf{v}'$  rotates around  $\mathbf{v}$  with fixed magnitude  $v' = v$  while subtending a constant angle  $\Phi$  from  $\mathbf{v}$ . To include all possible encounters experienced by a molecule of velocity  $\xi$  at  $\mathbf{x}$ , we integrate over a plane normal to  $\mathbf{v}$  and passing through  $\mathbf{x}$ . In this plane, let  $b, \varepsilon$  be polar coordinates. Then  $b$  is the distance from  $\mathbf{x}$  to the initial asymptote of the second molecular trajectory. A knowledge of the law of intermolecular force enables us to calculate  $b$  as a function of  $\Phi$  and  $v$ ."

For a spherically asymmetric molecular model,  $b$  is a function of  $\varepsilon$  as well as of  $\Phi$  and of  $v$ . Since we are considering only spherically symmetric molecular models, as implied by the above paragraph, we shall write

$$v b \left| \frac{db}{d\Phi} \right| = B(v, \Phi) = v I(v, \Phi) \quad (4.4)$$

where  $I(v, \Phi) \text{ Csc } \Phi$  is the differential scattering cross section.

In the next section we perform some of the integrations in the evaluation of the collision integrals  $C(Q)$  for selected  $Q$ . In Section VI we show how the integrations for rigid elastic spheres and for inverse power molecules can be more readily effected.

## V. Evaluation of the Collision Integrals

Substituting the series representation (3.1) into the expression (4.1) for  $C(Q)$  and effecting a simple change of scale by replacing  $h\mathbf{c}$  by  $\mathbf{c}$ ,  $h^3 d\mathbf{c}$  by  $d\mathbf{c}$ ,  $h v$  by  $v$ , etc., we obtain

$$C(Q) = \sum_{ij} b_i b_j R_{ij}(Q) \quad (5.1)$$

where

$$R_{ij}(Q) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\infty} d\mathbf{c} \int_{\infty} d\mathbf{c}^* \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\pi} d\Phi B\left(\frac{v}{h}, \Phi\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{c}^2 + \mathbf{c}^{*2})} \delta Q \frac{H_i(\mathbf{c}) H_j(\mathbf{c}^*)}{i! j!}. \quad (5.2)$$

We take  $Q = H_{\mathbf{k}}(h\mathbf{c})$ . Designating by  $R_{\mathbf{ij}}(\mathbf{k})$  the value of  $R_{\mathbf{ij}}(H_{\mathbf{k}}(h\mathbf{c}))$ , we see by means of (2.8) and (5.2) that  $R_{\mathbf{ij}}(\mathbf{k})$  divided by  $\mathbf{k}!$  is the coefficient of  $\mathbf{p}^i \mathbf{q}^j \mathbf{r}^k$  in the power series representation of

$$R = \frac{e^{-T^2}}{8\pi^3} \int_{\infty} d\mathbf{c} \int_{\infty} d\mathbf{c}^* \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\pi} d\Phi B\left(\frac{v}{h}, \Phi\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}(c^2 + c^{*2})} \times \\ \times e^{\mathbf{p} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{c}^*} \{e^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}^*} + e^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}} - e^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}^*} - e^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}\}. \quad (5.3)$$

Here

$$2T^2 = p^2 + q^2 + r^2. \quad (5.4)$$

For brevity, we write  $R$  in place of  $R(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ .

The quantities  $b_{\mathbf{i}}$ , defined by (3.3), are expressible in terms of moments of  $F$  and may be regarded as representing gross properties of the gas flow. *E.g.*, those of lowest index are certain combinations of the density, the mean velocity, the temperature, the pressure tensor, and the flux of energy vector. By (5.2), quantities  $R_{\mathbf{ij}}(Q)$  are determinate from the intermolecular force law, without knowledge of  $F$ . To find the  $R_{\mathbf{ij}}(\mathbf{k})$ , it suffices to calculate formally the power series representation of  $R$ . *Therefore, explicit evaluation of all collision integrals, for any spherically symmetric molecular model, is equivalent to conversion of the definite integral (5.3) for  $R$  into a power series.* To this task we now address ourselves.

We start by transforming to  $\mathbf{w}$  and  $\mathbf{v}$  in place of  $\mathbf{c}$  and  $\mathbf{c}^*$  as variables of integration in (5.3). By means of (4.3) and the relations  $d\mathbf{c} d\mathbf{c}^* = 8 d\mathbf{w} d\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$  and  $v = v'$ , we obtain

$$R = \frac{2e^{-T^2}}{\pi^3} \int_{\infty} d\mathbf{w} \int_{\infty} d\mathbf{v} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\pi} d\Phi B\left(\frac{v}{h}, \Phi\right) e^{-v^2 - w^2} \times \\ \times e^{\mathbf{s} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}} \{\text{Cosh}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}') - \text{Cosh}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\}, \quad (5.5)$$

where

$$\mathbf{s} = \mathbf{q} - \mathbf{p}, \\ 2\mathbf{t} = \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}. \quad (5.6)$$

Since

$$\int_{\infty} d\mathbf{w} e^{-w^2 + 2\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}} = \pi^{\frac{3}{2}} e^{t^2}, \quad (5.7)$$

(5.5) may be written in the form

$$R = \frac{2e^{t^2 - T^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{\infty} d\mathbf{v} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\pi} d\Phi B\left(\frac{v}{h}, \Phi\right) e^{-v^2 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}} \times \\ \times \{\text{Cosh}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}') - \text{Cosh}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\}. \quad (5.8)$$

We next perform the integration over  $d\varepsilon$ . Taking for  $\varepsilon$  the angle between the planes determined by  $\mathbf{v}$  and  $\mathbf{v}'$  and by  $\mathbf{v}$  and  $\mathbf{r}$ , we have, from a cosine law in spherical trigonometry,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \cos \Phi + r v \sin \chi \sin \Phi \cos \varepsilon, \quad (5.9)$$



where  $\chi = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$  and  $\Phi = (\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ . Then, by means of the definite integral

$$\int_0^{2\pi} d\varepsilon e^{\pm \lambda \cos \varepsilon} = 2\pi I_0(\lambda), \quad (5.10)$$

where  $I_0(\lambda)$  is the modified Bessel function of order zero, we obtain, for any spherically symmetric molecular model,

$$R = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{t^2 - T^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} \int_0^{\pi} d\Phi B\left(\frac{v}{h}, \Phi\right) e^{-v^2 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}} \times \\ \times \{\cosh(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \cos \Phi) I_0(\lambda) - \cosh(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\}, \quad (5.11)$$

where

$$\lambda = rv \sin \chi \sin \Phi. \quad (5.12)$$

We proceed by representing the integrand of (5.11) as a series in the components of  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{r}$ . First we write

$$e^{\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}} = e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}} e^{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}} = \sum_{\alpha \beta} \frac{(-1)^\alpha \mathbf{p}^\alpha \mathbf{q}^\beta v^{\alpha+\beta}}{\alpha! \beta!} \quad (5.13)$$

where\*

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad (5.14)$$

the sextuple summation being on all triplets  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  of non-negative integers. We also write

$$\cosh(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \cos \Phi) = \sum_{\gamma} \frac{\mathbf{r}^{2\gamma} \mathbf{v}^{2\gamma} \cos^{2\gamma} \Phi}{(2\gamma)!}. \quad (5.15)$$

Since

$$I_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{4^n n! n!} \quad (5.16)$$

and

$$\lambda^2 = \{\mathbf{r}^2 v^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2\} \sin^2 \Phi, \quad (5.17)$$

we have, by using the binomial expansion

$$(x - y)^n = n! \sum_{\delta + \varepsilon = n} \frac{(-1)^\varepsilon x^\delta y^\varepsilon}{\delta! \varepsilon!}, \quad (5.18)$$

the expansion

$$I_0(rv \sin \chi \sin \Phi) = \sum_{\delta, \varepsilon=0}^{\infty} \frac{(-1)^\varepsilon \mathbf{r}^{2\delta} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^{2\varepsilon} v^{2\delta}}{4^{\delta+\varepsilon} \delta! \varepsilon! (\delta + \varepsilon)!} (\sin \Phi)^{2\delta+2\varepsilon}. \quad (5.19)$$

The implied changes in the order of summations here, as in later expansions, are conveniently legitimate without consideration of convergence since we are here interested only in obtaining the coefficients in the series representation of  $R$ , not its evaluation for numerical values of the components of  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{r}$ .

By means of (5.19) and the trinomial expansions

$$\mathbf{r}^{2\delta} = \delta! \sum_{\delta} \frac{\mathbf{r}^{2\delta}}{\delta!}, \\ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^{2\varepsilon} = (2\varepsilon)! \sum_{\varepsilon} \frac{\mathbf{r}^{2\varepsilon} \mathbf{v}^{2\varepsilon}}{(2\varepsilon)!}, \quad (5.20)$$

\* Only for the triplets  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \lambda, \mu, \nu, \rho, \tau, \chi$ , and  $\omega$ , identified by Greek letters, do we use symbols  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , etc.

we obtain

$$I_0(rv \sin \chi \sin \Phi) = \sum_{\delta \epsilon} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon)! r^{2\delta+2\epsilon} v^{2\delta} \mathbf{v}^{2\epsilon}}{4^{\delta+\epsilon} \delta! (2\epsilon)! \epsilon! (\delta+\epsilon)!} (\sin \Phi)^{2\delta+2\epsilon}. \quad (5.21)$$

In view of (5.15) and (5.21) we write the expansion of  $\cosh(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})$  in the form

$$\cosh(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = \sum_{\gamma \delta \epsilon} \delta_{\delta+\epsilon, 0} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon)! r^{2\gamma+2\delta+2\epsilon} v^{2\delta} \mathbf{v}^{2\gamma+2\epsilon}}{4^{\delta+\epsilon} (2\gamma)! \delta! (2\epsilon)! \epsilon! (\delta+\epsilon)!}. \quad (5.22)$$

Finally, substituting (5.13), (5.15), (5.21) and (5.22) into (5.11), we obtain

$$R = e^{\lambda^2 - T^2} \sum \frac{(-1)^{\alpha+\epsilon} D_{\gamma \delta \epsilon}^{\alpha+\beta} \mathbf{p}^\alpha \mathbf{q}^\beta r^{2(\gamma+\delta+\epsilon)}}{\alpha! \beta! (2\gamma)! \delta! (2\epsilon)!} \quad (5.23)$$

where

$$D_{\gamma \delta \epsilon}^\beta = \frac{4(2\epsilon)!}{\sqrt{\pi} 4^{\delta+\epsilon} (\delta+\epsilon)! \epsilon!} \int_0^\pi d\mathbf{v} \int d\Phi B\left(\frac{v}{h}, \Phi\right) e^{-v^2} \mathbf{v}^{\beta+2\gamma+2\epsilon} v^{2\delta} \times \\ \times \{(\cos \Phi)^{2\gamma} (\sin \Phi)^{2\delta+2\epsilon} - \delta_{\delta+\epsilon, 0}\}. \quad (5.24)$$

The summation in (5.23) is over the five sets of triplets  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , and  $\epsilon$  of non-negative integers. Letting

$$K_\gamma^\epsilon(v) = \frac{1}{4^\epsilon \epsilon!} \int_0^\pi d\Phi B(v, \Phi) \{\cos^{2\gamma} \Phi \sin^{2\epsilon} \Phi - \delta_{\epsilon, 0}\}, \quad (5.25)$$

we have

$$D_{\gamma \delta \epsilon}^\beta = \frac{4(2\epsilon)!}{\sqrt{\pi} \epsilon!} \int_0^\pi d\mathbf{r} K_\gamma^{\delta+\epsilon}\left(\frac{v}{h}\right) e^{-v^2} \mathbf{v}^{\beta+2\gamma+2\epsilon} v^{2\delta}. \quad (5.26)$$

Finally, using polar coordinates  $(v, \vartheta, \varphi)$  to integrate over the surface of a sphere of radius  $v$ , we obtain

$$D_{\gamma \delta \epsilon}^\beta = \frac{(2\epsilon)!}{\sqrt{\pi} \epsilon!} A_{\beta+2\gamma+2\epsilon} \int_0^\infty dv K_\gamma^{\delta+\epsilon}\left(\frac{v}{h}\right) e^{-v^2} v^{\beta+2\gamma+2\delta+2\epsilon+2} \quad (5.27)$$

where

$$A_\omega = 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta (\cos \vartheta)^{\omega_1} (\sin \vartheta)^{\omega_2+\omega_3+1} (\cos \varphi)^{\omega_2} (\sin \varphi)^{\omega_3} \\ = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\omega+3}{2}\right)} \prod_{i=1}^3 \{1 + (-1)^{\omega_i}\} \Gamma\left(\frac{\omega_i+1}{2}\right). \quad (5.28)$$

We are able to effect the integration over  $d\Phi$  in (5.25) only for rigid elastic spheres, and that over  $dv$  in (5.27) only for rigid elastic spheres and for inverse power molecules. More direct methods of performing the integrations for these molecular models are given in Section VI.

We now complete the expansion of  $R$  as a series in the components of  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{r}$ . From (5.4) and (5.6) we express  $t^2 - T^2$  in terms of  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{r}$ . Then, using expansions of the form (5.13), we obtain from (5.23)

$$R = \sum_{\sigma} \frac{(-1)^{\alpha+\epsilon+\lambda+\mu+\nu}}{4^{\lambda+\mu+\nu} 2^{\epsilon+\tau+\chi} \sigma!} D_{\gamma \delta \epsilon}^{\alpha+\beta} \mathbf{p}^i \mathbf{q}^j \mathbf{r}^k. \quad (5.29)$$

where

$$\begin{aligned}\sigma &= (\alpha, \beta, 2\gamma, \delta, 2\epsilon, \lambda, \mu, \nu, \rho, \tau, \chi), \\ \sigma! &= \alpha! \beta! (2\gamma)! \delta! (2\epsilon)! \lambda! \mu! \nu! \rho! \tau! \chi!,\end{aligned}\quad (5.30)$$

and where

$$\begin{aligned}i &= \alpha + 2\lambda + \tau + \chi, \\ j &= \beta + 2\mu + \rho + \chi, \\ k &= 2\gamma + 2\delta + 2\epsilon + 2\nu + \rho + \tau.\end{aligned}\quad (5.31)$$

The  $\sigma$  under the summation sign indicates a 33-fold summation over non-negative integers. In (5.31), addition and equality of triplets are defined as in standard vector notation.

Since  $R_{ij}(\mathbf{k})$  is equal to  $k!$  times the coefficient of  $p^i q^j r^k$  in the expansion of  $R \equiv R(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$  as a series in the components of  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{r}$ , we see immediately from (5.29) and (5.31) that

$$R_{ij}(\mathbf{k}) = k! \sum_{\sigma} \frac{(-1)^{\alpha+\epsilon+\lambda+\mu+\nu}}{4^{\lambda+\mu+\nu} 2^{\epsilon+\tau+\chi} \sigma!} D_{\gamma\delta\epsilon}^{\alpha+\beta} \quad (5.32)$$

where the summation is over all  $\sigma$  satisfying (5.31),  $i, j$  and  $k$  being fixed.

The terms in the right hand member of (5.32) may be symmetrized in  $\alpha$  and  $\beta$  by replacing  $(-1)^\alpha$  by  $\frac{1}{2}(-1)^\alpha + \frac{1}{2}(-1)^\beta$ . This step, which may be justified by examining (5.28), may be traced back to the symmetry in  $\mathbf{c}$  and  $\mathbf{c}^*$  of the integrand in the general collision integral (4.1). The vanishing of  $A_\omega$  for many  $\omega$  greatly reduces the number of non-vanishing  $D_{\gamma\delta\epsilon}^{\alpha+\beta}$  in (5.32).

We summarize our general result. *Six of the eight quadratures needed to determine all collision integrals for any spherically symmetric model have been effected explicitly.* By (5.32),  $R_{ij}(\mathbf{k})$  is expressed as a finite sum of the quantities  $D_{\gamma\delta\epsilon}^{\alpha+\beta}$ , which are given as double integrals by (5.26) and (5.27).

## VI. Special Molecular Models

*A. Rigid Elastic Spheres.* For rigid elastic spheres of diameter  $d$ , for which [2, p. 168; 3, pp. 342–343]

$$\begin{aligned}b &= d \cos \frac{1}{2} \Phi, \\ B(v, \Phi) &\equiv v b \left| \frac{db}{d\Phi} \right| = \frac{1}{4} d^2 v \sin \Phi,\end{aligned}\quad (6.1)$$

the integrations over  $d\Phi$  and  $dv$  in (5.25) and (5.27), giving  $K_\epsilon^\gamma(v)$  and  $D_{\gamma\delta\epsilon}^\beta$  are easily performed. A better procedure, however, is to observe that  $d\epsilon d\Phi \sin \Phi$  is the differential element of solid angle in the direction of  $\mathbf{v}'$ , in a coordinate system with  $\mathbf{v}$  as polar axis. Taking polar coordinates  $(v', \chi', \epsilon')$  for  $\mathbf{v}'$  in a coordinate system with  $\mathbf{r}$  as polar axis, we readily find that

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} d\epsilon \int_0^\pi d\Phi \sin \Phi \cosh(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}') &= \int_0^{2\pi} d\epsilon' \int_0^\pi d\chi' \sin \chi' \cosh(r v \cos \chi') \\ &= 4\pi \frac{\sinh r v}{r v}.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Hence we obtain, from (5.8), (6.1) and (6.2)

$$R = \frac{2d^2}{\sqrt{\pi} h} e^{t^2 - T^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} e^{-v^2 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}} \left\{ \frac{\sinh r v}{r} - v \cosh(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \right\}. \quad (6.3)$$



An integration over the surface of a sphere of radius  $v$  may now be performed, but then a series expansion would be required before integration over  $dv$ . The final result is more readily obtained by expanding the integrand in (6.3) in terms of  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{r}$  and integrating termwise over  $dv$ . Using (5.13), (5.15) and (5.20), we obtain

$$R = e^{t^2 - T^2} \sum_{\alpha \beta \gamma} \frac{(-1)^\alpha D_Y^{\alpha+\beta}}{\alpha! \beta! (2\gamma)!} \mathbf{p}^\alpha \mathbf{q}^\beta \mathbf{r}^{2\gamma} \quad (6.4)$$

where

$$\begin{aligned} D_Y^\beta &= \frac{2d^2}{\sqrt{\pi} h} \int d\mathbf{v} e^{-v^2} \mathbf{v}^\beta v \left\{ \frac{(2\gamma)! \gamma!}{(2\gamma+1)! \gamma!} v^{2\gamma} - \mathbf{v}^{2\gamma} \right\} \\ &= \frac{d^2}{4\sqrt{\pi} h} \Gamma\left(\frac{\beta}{2} + \gamma + 2\right) \left\{ \frac{(2\gamma)! \gamma!}{(2\gamma+1)! \gamma!} A_\beta - A_{\beta+2\gamma} \right\}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$A_\omega$  having been defined by (5.30).

We now express  $t^2 - T^2$  in the exponent in (6.4) in terms of  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{r}$ , by means of (5.4) and (5.6), and expand the resulting exponential expression in terms of the components of  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{r}$ . Using expressions of the form (5.13), we obtain

$$R = \sum_{\sigma} \frac{(-1)^{\alpha+\lambda+\mu+\nu}}{4^{\lambda+\mu+\nu} 2^{\varrho+\tau+\chi} \sigma!} D_Y^{\alpha+\beta} \mathbf{p}^i \mathbf{q}^j \mathbf{r}^k \quad (6.6)$$

where, here,

$$\begin{aligned} \sigma &= (\alpha, \beta, 2\gamma, \lambda, \mu, \nu, \rho, \tau, \chi), \\ \sigma! &= \alpha! \beta! (2\gamma)! \lambda! \mu! \nu! \rho! \tau! \chi!, \end{aligned} \quad (6.7)$$

and

$$\begin{aligned} i &= \alpha + 2\lambda + \tau + \chi, \\ j &= \beta + 2\mu + \rho + \chi, \\ k &= 2\gamma + 2\nu + \rho + \tau. \end{aligned} \quad (6.8)$$

The  $\sigma$  under the summation sign in (6.6) indicates a 27-fold summation over non-negative integers.

Finally, from (6.6) and (6.8), we see that, for rigid elastic spheres,

$$R_{ij}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}! \sum_{\sigma} \frac{(-1)^{\alpha+\lambda+\mu+\nu}}{4^{\lambda+\mu+\nu} 2^{\varrho+\tau+\chi} \sigma!} D_Y^{\alpha+\beta} \quad (6.9)$$

where the sum is on all  $\sigma$  satisfying (6.8),  $i, j$  and  $\mathbf{k}$  being fixed. In (6.9), we may symmetrize in  $\alpha$  and  $\beta$  by replacing  $(-1)^\alpha$  by  $\frac{1}{2}(-1)^\alpha + \frac{1}{2}(-1)^\beta$ .

On comparing (6.6) to (6.9) with (5.29) to (5.32), we see that the method of integration for elastic spheres is equivalent to effecting summations over  $\delta$  and  $\epsilon$  in (5.29).

*B. Inverse Power Molecules.* For a repulsive force law varying inversely as the  $s^{\text{th}}$  power of the distance  $d$  between molecules, it may be shown that [1, pp. 153–157; 2, pp. 170–171; 3, p. 342; 8, pp. 40–43]

$$B(v, \Phi) = v^n f_n(\Phi) \quad (6.10)$$

where

$$n = \frac{s-5}{s-1}. \quad (6.11)$$

Quite evidently, the special form of (6.10) permits us to integrate over  $d\mathbf{v}$  in (5.24). However, the remaining integration, over  $d\Phi$ , can be effected only by lengthy numerical calculations.

Substituting (6.10) into (5.24), and integrating over  $d\mathbf{v}$ , we find that

$$D_{\gamma\delta\epsilon}^{\beta} = \frac{(2\epsilon)!}{2^{\gamma}\pi^{\epsilon}h^{\epsilon}} \Gamma\left(\gamma + \delta + \epsilon + \frac{\beta + n + 3}{2}\right) A_{\beta+2\gamma+2\epsilon} S_{\gamma}^{\delta+\epsilon}(n) \quad (6.12)$$

where

$$S_{\gamma}^{\epsilon}(n) = \frac{1}{4^{\epsilon}\epsilon!} \int_0^{\pi} d\Phi f_n(\Phi) \{\cos^{2\gamma}\Phi \sin^{2\epsilon}\Phi - \delta_{\epsilon,0}\}. \quad (6.13)$$

For the Maxwellian gas, for which  $s=5$ ,  $n=0$ , there is no especial simplification in these formulae. However, by means of arguments used by GRAD [3, pp. 360–361] we can deduce from (5.2) that, for Maxwellian molecules,  $R_{ij}(\mathbf{k})=0$  unless  $i_1+i_2+i_3+j_1+j_2+j_3=k_1+k_2+k_3$ . Thus, for Maxwellian molecules, the sum (5.1) giving  $C(Q)$  becomes a finite sum, for  $Q$  any polynomial.

**Acknowledgment.** The author desires to acknowledge suggestions by Professor TRUESDELL which led to improvements in the manuscript of this paper.

### References

- [1] BOLTZMANN, L.: Vorlesungen über Gastheorie, Vol. I. Leipzig: Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner) 1896.
- [2] CHAPMAN, S., & T. G. COWLING: The Mathematical Theory of Non-uniform Gases. Cambridge: Cambridge University Press 1939.
- [3] GRAD, H.: On the Kinetic Theory of Rarefied Gases. Comm. Pure and Appl. Math. **2**, 331–407 (1949).
- [4] GRAD, H.: Note on N-Dimensional Hermite Polynomials. Comm. Pure and Appl. Math. **2**, 325–330 (1949).
- [5] IKENBERRY, E.: On the Distribution Function in Phase Space, with Application to the Statistical Theory of Liquids. J. Chem. Phys. **19**, 467–470 (1951).
- [6] IKENBERRY, E.: On the Distribution Function in Phase Space, with Application to the Stationary State of an Ideal Gas. J. Chem. Physics **20**, 568–570 (1952).
- [7] IKENBERRY, E., & C. TRUESDELL: On the Pressures and Flux of Energy in a Gas according to MAXWELL'S Kinetic Theory, I. J. Rational Mech. Anal. **5**, 1–54 (1956).
- [8] MAXWELL, J. C.: The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. Cambridge: Cambridge University Press 1890: (a) On the Dynamical Theory of Gases, Vol. II, p. 26. (b) On the Stresses in Rarefied Gases Arising from Inequalities of Temperature, Vol. II, p. 681.

Alabama Polytechnic Institute  
Auburn, Alabama

(Received January 2, 1959)

# *Spherical Means and Radiation Conditions*

CALVIN H. WILCOX

*Communicated by A. ERDÉLYI*

## **Introduction**

Nearly fifty years have passed since SOMMERFELD introduced his radiation condition [9]. During this period it has become customary to use the condition in formulating and solving the boundary value problems associated with the diffraction of time-harmonic waves. The radiation condition is satisfactory from the mathematical viewpoint in that it leads to boundary value problems having unique solutions [7]. However, the physical reasons usually advanced for adopting it, rather than some other condition, are far from convincing [9, 10, p. 190]. Our purpose here is to provide a more satisfying foundation for the use of SOMMERFELD'S condition by deriving it from other facts concerning wave propagation that are both mathematically demonstrable and evident to physical intuition.

The diffraction problem for time-harmonic waves is usually introduced by considering wave sources having a time-harmonic, or sinusoidal, time dependence and assuming that the wave generated by these sources has the same time dependence. This assumption is attractive because it relieves us from the necessity of considering the initial values of the wave, thus replacing an initial-boundary value problem by a pure boundary value problem. However, we pay for the simplification in that the wave is not uniquely determined by the conditions imposed, on account of the possible existence of standing waves. To see why the uniqueness has been lost we must examine more carefully our assumption that the wave is time-harmonic. We can expect this to be strictly true only if the sources have acted for an infinite length of time so that any transient waves, produced when the sources began to act, have vanished. If we assume that the sources begin at a finite time then we must specify the initial condition of the wave and the wave is uniquely determined thereby. It is not in general time-harmonic, but physical intuition suggests it will differ from a time-harmonic wave only by a transient wave. Thus we might find the desired time-harmonic wave by solving the suggested initial-boundary value problem and passing to the limit of large time. Of course, if we can carry out this program then the problem is solved and we have no need for a radiation condition. Actually, this is possible in only a few cases. Hence we seek to characterize the time-harmonic wave directly, as the solution of a boundary value problem, without reference to the more difficult initial-boundary value problem. This is accomplished here by showing that SOMMERFELD'S radiation condition for the time-harmonic wave



is a consequence of a simple and easily demonstrable property of the solution of the initial-boundary value problem; namely, that it represents a wave propagating outward from the sources with unit velocity.

A similar program for finding radiation conditions has been proposed by J. J. STOKER [11, 12, p. 175]. However, in his work it is carried through only for two problems, those of surface-gravity waves in an infinite ocean and waves on a running stream, where closed analytical expressions for the solutions of the complete initial-boundary value problems are available.

In § 1 the initial-boundary value problem for time-harmonic sources is formulated and the solution is shown to consist of a time-harmonic wave plus a transient. In § 2 the basic properties of the spherical means of wave functions are developed and applied to show that any time-harmonic wave function is the sum of a radiation function and a standing wave. § 3 and § 4 are devoted to the derivation of SOMMERFELD's and several equivalent radiation conditions. In § 5 corresponding results are deduced for the vector diffraction problem.

### § 1. The Initial-Boundary Value Problems

Solutions  $u(p, t)$  of the wave equation

$$\Delta u(p, t) = \frac{\partial^2 u(p, t)}{\partial t^2}$$

represent disturbances propagating with unit velocity. Indeed, it is to this fundamental property that the equation owes its name. The property finds an analytical expression in

**Theorem 1:** *Let  $u(p, t)$  be defined and satisfy the wave equation in the space-time domain  $\mathfrak{D}$  defined by*

$$r > r_0 + t, \quad t > 0,$$

where  $r$  is the distance from  $p$  to a fixed point  $O$ , and  $r_0 \geq 0$  is a constant. Moreover, let

$$u(p, 0+) = 0, \quad \frac{\partial u(p, 0+)}{\partial t} = 0 \quad \text{for } r > r_0.$$

Then  $u(p, t)$  vanishes identically in  $\mathfrak{D}$ .

A less precise, but more suggestive, statement of the theorem is that if a disturbance is contained in the sphere  $\mathfrak{S}(O, r_0)$ , with center at  $O$  and radius  $r_0$ , at time  $t=0$  (i.e.,  $u$  and  $\partial u/\partial t$  vanish outside  $\mathfrak{S}(O, r_0)$  for  $t=0$ ) then at any later instant  $t$  the disturbance is contained in  $\mathfrak{S}(O, r_0+t)$ .

The proof of Theorem 1 is effected by showing that any solution  $u(p, t)$  of the wave equation in  $\mathfrak{D}$  can be expressed in terms of its initial values

$$u(p, 0+) = F(p), \quad \frac{\partial u(p, 0+)}{\partial t} = G(p)$$

by POISSON's formula

$$u(p, t) = t \tilde{G}(p, t) + \frac{\partial}{\partial t} \{t \tilde{F}(p, t)\},$$

the formula being valid at every point  $(p, t)$  in  $\mathfrak{D}$ . Here  $\tilde{F}(p, t)$  is the mean value of  $F$  over  $\mathfrak{S}(p, t)$ . In particular, if  $F$  and  $G$  vanish then  $u(p, t)$  is necessarily zero

in  $\mathfrak{D}$ . The proof that  $u(p, t)$  is given by Poisson's formula can be given by a classical method due to LIOUVILLE; see [13, pp. 212–213]. It is not reproduced here.

Now let us consider the propagation of waves in an exterior domain  $\mathfrak{B}$  in Euclidean space; that is, a domain  $\mathfrak{B}$  that includes all points lying outside of some sphere. The boundary  $\mathfrak{S}$  of  $\mathfrak{B}$  is then a bounded set which we assume, for simplicity, consists of a finite number of smooth surfaces. The physical process that we wish to consider is the scattering, by objects represented by the boundary  $\mathfrak{S}$ , of the wave generated by time-harmonic sources of density

$$f(p, k) e^{-ik t},$$

which begin to act at time  $t=0$ . The nature of the scattering objects is assumed to be described by a Dirichlet or Neumann boundary condition on  $\mathfrak{S}$ . Thus, if we assume the initial state of the wave medium is one of rest, the process is described by a wave function  $\varphi(p, t)$  that satisfies

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(p, t) - \frac{\partial^2 \varphi(p, t)}{\partial t^2} &= f(p, k) e^{-ik t}, & p \text{ in } \mathfrak{B}, & \quad t > 0, \\ \varphi(p, 0+) &= 0, & \frac{\partial \varphi(p, 0+)}{\partial t} &= 0, & p \text{ in } \mathfrak{B}, \\ \varphi(p, t) &= 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \varphi(p, t)}{\partial n} = 0 \text{ on } \mathfrak{S}, & t &\geq 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

where  $\partial \varphi / \partial n$  is the usual normal derivative of  $\varphi$  on  $\mathfrak{S}$ . It is also assumed that the sources are confined to a bounded portion of  $\mathfrak{B}$ , so that  $f(p, k)$  vanishes outside a sufficiently large sphere.

The wave function  $\varphi(p, t)$  is uniquely determined by conditions (1.1). To show this we make use of Theorem 1 and the energy theorem for the wave equation. The latter asserts that if  $u(p, t)$  satisfies the wave equation in the spatial domain  $\mathfrak{B}$  for  $a < t < b$  then

$$(1.2) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{B}} \left\{ (Vu)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} dV = 2 \int_{\mathfrak{S}} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad a < t < b,$$

where  $\mathfrak{S}$  is the boundary of  $\mathfrak{B}$ . It is easily verified by differentiating under the integral sign on the left and using the wave equation and the divergence theorem. Now, to prove the uniqueness of  $\varphi(p, t)$  let  $\varphi'(p, t)$  be any other solution of (1.1) so that  $u(p, t) = \varphi(p, t) - \varphi'(p, t)$  solves (1.1) with  $f(p, k) = 0$ . We complete the proof by showing that  $u(p, T) = 0$  in  $\mathfrak{B}$  for any fixed  $T > 0$ . First of all, if  $\mathfrak{S}(0, r_0)$  is any sphere containing  $\mathfrak{S}$  and outside of which  $f(p, k) = 0$  then both  $\varphi(p, T)$  and  $\varphi'(p, T)$ , and therefore  $u(p, T)$ , are zero outside of  $\mathfrak{S}(0, r_0 + T)$ , by Theorem 1. Now apply (1.2) to  $u$  in the domain  $\mathfrak{B}_T$  consisting of those points of  $\mathfrak{B}$  that lie inside  $\mathfrak{S}(0, r_0 + T + 1)$ . The surface integral in (1.2) falls into two parts, one over  $\mathfrak{S}$  and one over  $\mathfrak{S}(0, r_0 + T + 1)$ . The first vanishes because  $u$  or  $\partial u / \partial n$  is identically zero on  $\mathfrak{S}$ . The second vanishes because  $u$  is identically zero on  $\mathfrak{S}(0, r_0 + T + 1)$  for  $0 \leq t < T + 1$ . Thus

$$(1.3) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{B}_T} \left\{ (Vu)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} dV = 0, \quad 0 < t < T + 1.$$

On integrating from 0 to  $T$  and using the initial conditions we get

$$\int_{\mathfrak{B}_T} \left\{ (Vu)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\}_{t=T} dV = \int_{\mathfrak{B}_T} \left\{ (Vu)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\}_{t=0+} dV = 0.$$

Hence  $u(p, T)$  is a constant which must be zero because of the initial conditions. Thus  $u(p, T)$  vanishes in  $\mathfrak{B}_T$  and therefore in all of  $\mathfrak{B}$ .

Our next objective is to show that the wave function  $\varphi(p, t)$  can be written as a sum

$$(1.3) \quad \varphi(p, t) = u(p, t) + e^{-i\hbar t} u(p),$$

where  $u(p, t)$  is a transient wave,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(p, t) = 0,$$

and  $u(p)$  is independent of  $t$ . It is clear that such a decomposition is unique if it exists. The existence of the decomposition can be shown by considering a related initial-boundary value problem for the domain  $\mathfrak{B}$ , the pulse problem [3, 4, 5]. It is defined by

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \Delta \varphi_0(p, t) - \frac{\partial^2 \varphi_0(p, t)}{\partial t^2} &= 0, \quad p \text{ in } \mathfrak{B}, \quad t > 0, \\ \varphi_0(p, 0+) &= 0, \quad \frac{\partial \varphi_0(p, 0+)}{\partial t} = -f(p, k), \quad p \text{ in } \mathfrak{B}, \\ \varphi_0(p, t) &= 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \varphi_0(p, t)}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \mathfrak{S}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

These conditions are formally equivalent to requiring that  $\varphi_0(p, t)$  be defined for all  $t$ , vanish identically for  $t < 0$ , and satisfy the differential equation

$$(1.5) \quad \Delta \varphi_0(p, t) - \frac{\partial^2 \varphi_0(p, t)}{\partial t^2} = f(p, k) \delta(t), \quad p \text{ in } \mathfrak{B}, \text{ all } t,$$

while the condition on  $\mathfrak{S}$  is unchanged. Thus  $\varphi_0(p, t)$  describes the wave due to impulsive forces acting at time  $t=0$  in a medium that is initially at rest. It is this interpretation that suggests the name "pulse problem" for (1.4). The same considerations that were applied to problem (1.1) above show that the pulse wave function  $\varphi_0(p, t)$  is uniquely determined by conditions (1.4) and that  $\varphi_0(p, t)$  vanishes outside  $\mathfrak{S}(O, r_0 + t)$  for each fixed  $t \geq 0$ .

The relationship between the pulse wave function and  $\varphi(p, t)$  can be obtained by the principle of DUHAMEL, or superposition principles [3, 4, 5]. The result is

**Theorem 2:**

$$\varphi(p, t) = \int_0^t \varphi_0(p, t - \tau) e^{-i\hbar \tau} d\tau, \quad p \text{ in } \mathfrak{B}, \quad t \geq 0.$$

This equation is formally evident from (1.5). To verify it let us define  $\varphi'(p, t)$  by

$$\varphi'(p, t) = \int_0^t \varphi_0(p, t - \tau) e^{-i\hbar \tau} d\tau$$

and show that it satisfies (1.1). It must then coincide with  $\varphi(p, t)$  by the uniqueness theorem. It is clear that the boundary condition satisfied by  $\varphi_0$  on  $\mathfrak{S}$



implies the same condition for  $\varphi'$ . Next

$$\frac{\partial \varphi'(p, t)}{\partial t} = \varphi_0(p, 0+) e^{-ik t} + \int_0^t \frac{\partial \varphi_0(p, t-\tau)}{\partial t} e^{-ik \tau} d\tau = \int_0^t \frac{\partial \varphi_0(p, t-\tau)}{\partial t} e^{-ik \tau} d\tau$$

whence  $\varphi'(p, 0+)$  and  $\frac{\partial \varphi'(p, 0+)}{\partial t}$  vanish. Finally,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi'(p, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial \varphi_0(p, 0+)}{\partial t} e^{-ik t} + \\ &+ \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi_0(p, t-\tau)}{\partial t^2} e^{-ik \tau} d\tau = -f(p, k) e^{-ik t} + \Delta \varphi'(p, t), \end{aligned}$$

which completes the verification.

We can now discuss the decomposition of  $\varphi(p, t)$  into a transient and a time-harmonic wave. Notice that under a simple change of variable Theorem 2 becomes

$$\varphi(p, t) = e^{-ik t} \int_0^t e^{ik \tau} \varphi_0(p, \tau) d\tau.$$

Thus if  $\varphi(p, t)$  has a decomposition (1.3) with  $u(p, t)$  a transient then

$$(1.6) \quad \int_0^\infty e^{ik t} \varphi_0(p, t) dt$$

necessarily exists and equals  $u(p)$ :

$$(1.7) \quad u(p) = \int_0^\infty e^{ik t} \varphi_0(p, t) dt,$$

and consequently

$$(1.8) \quad u(p, t) = -e^{-ik t} \int_t^\infty e^{ik \tau} \varphi_0(p, \tau) d\tau = -\int_0^\infty e^{ik s} \varphi_0(p, t+s) ds.$$

Conversely, if the integral (1.6) exists then  $\varphi(p, t)$  has a decomposition (1.3) where  $u(p, t)$  is given by (1.8) and hence is a transient. Moreover, if the last integral can be differentiated twice under the integral sign then  $u(p, t)$  satisfies the wave equation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

because  $\varphi_0$  satisfies this equation. It then follows from (1.3) and the equation for  $\varphi$  that  $u(p)$  satisfies

$$(1.9) \quad \Delta u(p) + k^2 u(p) = f(p, k).$$

Finally, it is clear from (1.8) that  $u(p, t)$  and therefore  $u(p)$  must satisfy the boundary condition

$$u(p) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial u(p)}{\partial n} = 0, \quad p \text{ on } \mathfrak{S}.$$

Our physical interpretation of the initial-boundary value problem suggests that (1.6) must converge and define a twice differentiable function. Indeed, if  $\mathfrak{B}$  is the whole of space, so there are no scatterers, then  $\varphi_0(p, t)$  is given by Poisson's formula. Hence, for each fixed  $p$ ,  $\varphi_0(p, t)$  actually vanishes for all

sufficiently large  $t$  and (1.6) is a proper integral. In the general case  $\varphi_0(p, t)$  consists of a direct wave, given by POISSON'S formula, plus a reflected wave or echo. Physical intuition suggests that the latter is due to a "trapped" wave that propagates along the scatterer  $\mathfrak{S}$  and radiates at each instant a wave with amplitude proportional to its instantaneous amplitude, which suggests that  $\varphi_0(p, t)$  decreases exponentially. However, present knowledge of the initial-boundary value problem is insufficient to prove this.

In the sequel we shall assume that (1.7) converges to a solution of (1.9). We shall call the problem of determining  $u(p)$  the diffraction problem for the scatterers  $\mathfrak{S}$  and sources  $f(p, k)$ . Our object is to characterize  $u(p)$  directly, without reference to  $\varphi_0(p, t)$ . Now we know that  $u(p)$  satisfies

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= f \quad \text{in } \mathfrak{B} \\ u(p) &= 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial u(p)}{\partial n} = 0, \quad p \text{ on } \mathfrak{S}, \end{aligned}$$

but that these conditions fail to determine a unique function. The simplest example showing this is perhaps the function

$$u'(p) = \frac{\sin k r}{r}$$

which satisfies the Helmholtz equation

$$\Delta u' + k^2 u' = 0$$

and vanishes on the spheres of radii  $\pi n/k$  about the origin,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . On the other hand, RELICH [7] has shown that there is at most one function satisfying (1.10) and SOMMERFELD'S radiation condition. Hence, we will have characterized  $u(p)$  if we can show that it must satisfy this condition. This is accomplished below. We begin by developing some properties of the spherical means of wave functions that are needed in the proof.

## § 2. Spherical Means and Wave Functions

If  $u(p)$  is a point function on a domain  $\mathfrak{B}$  in Euclidean space we denote by  $\tilde{u}(p, r)$  the mean value of  $u(p)$  over the sphere  $\mathfrak{S}(p, r)$  with center at  $p$  and radius  $r$ ; thus

$$(2.1) \quad \tilde{u}(p, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\mathfrak{S}(p, r)} u dS.$$

If  $u(p)$  is continuous in  $\mathfrak{B}$  then  $\tilde{u}(p, r)$  is defined for all pairs  $(p, r)$  such that  $\mathfrak{S}(p, r)$  is contained in  $\mathfrak{B}$ . For our discussion of the properties of these spherical means it is convenient to identify the points  $p$  with their position vectors  $\mathbf{x} = \vec{Op}$  relative to a fixed origin  $O$ . Then to each point function  $u(p)$  there corresponds a function of  $\mathbf{x}$  which we denote by the same letter;  $u(p) = u(\mathbf{x})$ . With this notation (2.1) becomes

$$(2.2) \quad \tilde{u}(\mathbf{x}, r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} u(\mathbf{x} + r \hat{\mathbf{r}}) d\Omega,$$

where  $\Omega$  is the unit sphere,  $d\Omega$  is the element of area on  $\Omega$ , and  $\hat{\mathbf{r}}$  is a unit vector defining a unique point on  $\Omega$ .

We shall need the following result, due to DARBOUX. If  $u(\mathbf{x})$  is of class  $C^2$  in a domain  $\mathfrak{B}$  then  $\tilde{u}(\mathbf{x}, r)$  is of class  $C^2$  in its corresponding domain of definition and satisfies there DARBOUX's equation

$$\Delta \tilde{u}(\mathbf{x}, r) = \frac{\partial^2 \tilde{u}(\mathbf{x}, r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{x}, r)}{\partial r},$$

where  $\Delta$  is the Laplacian relative to  $\mathbf{x}$ . For a proof see [2, p. 411]. Notice that DARBOUX's equation can also be written

$$(2.3) \quad \Delta(r\tilde{u}) = \frac{\partial^2(r\tilde{u})}{\partial r^2}.$$

Let  $\mathfrak{B}$  be an exterior domain and let  $r_0(\mathbf{x})$  be the least radius  $r$  for which  $\mathfrak{S}(\mathbf{x}, r)$  contains the boundary of  $\mathfrak{B}$ . Then if  $u(\mathbf{x})$  is defined in  $\mathfrak{B}$ ,  $\tilde{u}(\mathbf{x}, r)$  is defined for every  $\mathbf{x}$  and  $r > r_0(\mathbf{x})$ . Now let  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  be a wave function, *i.e.*,

$$\Delta \varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2},$$

for  $\mathbf{x}$  in  $\mathfrak{B}$  and  $t > 0$ . Then the spherical mean  $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t, r)$  satisfies (2.3) for all  $\mathbf{x}$ ,  $r > r_0(\mathbf{x})$ , and  $t > 0$ . Moreover, we can apply  $\Delta$  under the integral sign in (2.2) and use the wave equation for  $\varphi$ . The result is

$$\frac{\partial^2(r\tilde{\varphi})}{\partial t^2} = \frac{\partial^2(r\tilde{\varphi})}{\partial r^2},$$

whence

$$r\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t, r) = F(r-t) + G(r+t),$$

for each fixed  $\mathbf{x}$ . The functions  $F$  and  $G$  can clearly change with  $\mathbf{x}$ . Thus we may write

$$(2.4) \quad \tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t, r) = \frac{F(\mathbf{x}, r-t) + G(\mathbf{x}, r+t)}{r}.$$

$F$  and  $G$  can be determined from the relations

$$(2.5) \quad \begin{aligned} F'(\mathbf{x}, r-t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} \right) r\tilde{\varphi} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} \right) r\varphi(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{r}}, t) d\Omega, \\ G'(\mathbf{x}, r+t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} \right) r\tilde{\varphi} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} \right) r\varphi(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{r}}, t) d\Omega, \end{aligned}$$

which makes clear that  $F(\mathbf{x}, t)$  and  $G(\mathbf{x}, t)$  are functions of class  $C^2$ . (We have written  $F'(\mathbf{x}, t)$  for  $\frac{\partial}{\partial t} F(\mathbf{x}, t)$ .) It is also evident from these relations that  $F(\mathbf{x}, t)$  and  $G(\mathbf{x}, t)$  are wave functions for all  $\mathbf{x}$  and for all  $t$  and  $t > r_0(\mathbf{x})$ , respectively. We shall apply these results to the pulse wave function  $\varphi_0$  in the next section.

Next consider a Helmholtz wave function  $u(\mathbf{x})$ , *i.e.*, a solution of the Helmholtz equation

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0,$$

defined and satisfying the differential equation for  $\mathbf{x}$  in  $\mathfrak{B}$ . This equation, together with DARBOUX's equation (2.3), implies that the means  $\tilde{u}(\mathbf{x}, r)$  satisfy

$$\frac{\partial^2(r\tilde{u})}{\partial r^2} + k^2(r\tilde{u}) = 0$$



for all  $\mathbf{x}$  and  $r > r_0(\mathbf{x})$ . Hence

$$r\tilde{u}(\mathbf{x}, r) = A e^{-ikr} + B e^{ikr},$$

where  $A$  and  $B$  are independent of  $r$  but may depend on  $\mathbf{x}$ . We shall write

$$(2.6) \quad \tilde{u}(\mathbf{x}, r) = \frac{i}{2} \frac{e^{-ikr}}{kr} u_1(\mathbf{x}) - \frac{i}{2} \frac{e^{ikr}}{kr} u_2(\mathbf{x}),$$

the constants  $\pm \frac{i}{2k}$  being introduced to simplify subsequent formulas. From (2.6) we have

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right)r\tilde{u} = e^{-ikr}u_1(\mathbf{x}), \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} + ik\right)r\tilde{u} = e^{ikr}u_2(\mathbf{x}),$$

whence

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u_1(\mathbf{x}) &= \frac{e^{ikr}}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right)r u(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{r}}) d\Omega, \\ u_2(\mathbf{x}) &= \frac{e^{-ikr}}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial r} + ik\right)r u(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{r}}) d\Omega. \end{aligned}$$

By differentiating these expressions under the integral sign and using the Helmholtz equation for  $u$  we find that  $u_1(\mathbf{x})$  and  $u_2(\mathbf{x})$  solve the Helmholtz equation for all  $\mathbf{x}$ ; that is, they are *entire* Helmholtz wave functions.

The functions  $u_1$  and  $u_2$  also occur naturally in connection with the problem of representing  $u$  in terms of layers of simple and double sources on the boundary  $\mathfrak{S}$  of  $\mathfrak{B}$ . To show this, let  $p$  be any point of  $\mathfrak{B}$  and apply the divergence theorem in the form

$$\int_{\mathfrak{D}} \{u \Delta v - v \Delta u\} dV = \int_{\text{Boundary of } \mathfrak{D}} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} dS$$

to  $u(q)$  and  $v(q) = \frac{e^{ikR}}{R}$ , where  $R$  is the distance from  $p$  to  $q$ , in the domain  $\mathfrak{D}$  lying between  $\mathfrak{S}$  and a surface  $\mathfrak{S}'$  containing  $\mathfrak{S}$  and  $p$  but excluding  $\mathfrak{S}(p, \alpha)$  where  $\alpha$  is small. The integral over  $\mathfrak{D}$  vanishes. Moreover, the integral over  $\mathfrak{S}(p, \alpha)$  equals  $4\pi u(p)$ , as we can see by noticing that it is independent of  $\alpha$  and tends to  $4\pi u(p)$  for  $\alpha \rightarrow 0$ . Thus we have

$$\begin{aligned} u(p) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{S}} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right\} dS + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{S}'} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right\} dS, \end{aligned}$$

where  $\mathfrak{S}'$  is any surface containing  $p$  and  $\mathfrak{S}$ . On taking  $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}(p, r)$ , so that  $R = r$  and  $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{r}}$  the last integral becomes

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{S}(p, r)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - u \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS.$$

Since

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} - u \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right)}{\left( \frac{e^{ikr}}{r} \right)^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{\left( \frac{e^{ikr}}{r} \right)} \right),$$

this integral equals

$$(e^{ikr})^2 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{e^{-ikr}}{4\pi} \int_{\Omega} r u(\mathbf{x} + r \hat{\mathbf{r}}) d\Omega \right\} = \frac{e^{ikr}}{4\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial r} - ik \right) r u(\mathbf{x} + r \hat{\mathbf{r}}) d\Omega = u_1(\mathbf{x}),$$

whence

$$(2.8) \quad u_1(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Xi} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right\} dS.$$

Thus we have

$$(2.9) \quad u(p) = u_1(p) + v_1(p), \quad p \text{ in } \mathfrak{B},$$

where

$$(2.10) \quad v_1(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Xi} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right\} dS.$$

Clearly,  $v_1$  satisfies the Helmholtz equation in  $\mathfrak{B}$ , since  $u$  and  $u_1$  do so, and represents the wave function due to layers of simple and double sources on  $\Xi$  of densities  $\partial u / \partial n$  and  $-u$ , respectively. In exactly analogous fashion we can show that

$$u(p) = u_2(p) + v_2(p), \quad p \text{ in } \mathfrak{B},$$

where

$$v_2(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Xi} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) \right\} dS.$$

SOMMERFELD'S radiation condition is frequently used in diffraction problems to show that for certain Helmholtz wave functions  $u_1(p) \equiv 0$ , so that  $u(p) \equiv v_1(p)$ . It is shown below, in § 4, that this is actually equivalent to SOMMERFELD'S condition for solutions of the Helmholtz equation. Meanwhile, let us use the terminology that a Helmholtz wave function  $u(p)$  (defined in an exterior domain) is a *radiation function* (respectively, *antiradiation function*) if  $u_1(p) \equiv 0$  (respectively,  $u_2(p) \equiv 0$ ).

Next, we should like to show that  $v_1(p)$  is always a radiation function. In view of (2.7) this is equivalent to

$$(2.11) \quad \left( \frac{\partial}{\partial r} - ik \right) r \tilde{v}_1(\mathbf{x}, r) = 0.$$

Now,  $v_1 = u - u_1$  whence  $\tilde{v}_1 = \tilde{u} - \tilde{u}_1$  and we know that

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} - ik \right) r \tilde{u}(\mathbf{x}, r) = e^{-ikr} u_1(\mathbf{x}).$$

Let us write

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\mathbf{x}, r) &= \frac{i}{2} \frac{e^{-ikr}}{kr} w_1(\mathbf{x}) - \frac{i}{2} \frac{e^{ikr}}{kr} w_2(\mathbf{x}) \\ &= \frac{i(w_1(\mathbf{x}) - w_2(\mathbf{x}))}{2kr} + \frac{i}{2} \frac{(e^{-ikr} - 1)}{kr} w_1(\mathbf{x}) - \frac{i}{2} \frac{(e^{ikr} - 1)}{kr} w_2(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Then, since  $u_1$  is an entire function,  $u_1(\mathbf{x}, r)$  is defined for all  $r$  and tends to the limit  $u_1(\mathbf{x})$  for  $r \rightarrow 0$ . Consequently, we must have

$$w_1(\mathbf{x}) = w_2(\mathbf{x}) \quad \text{and} \quad u_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} w_1(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} w_2(\mathbf{x}),$$

whence

$$w_1(\mathbf{x}) = w_2(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x})$$

and

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right)r\tilde{u}_1(\mathbf{x}, r) = e^{-ikr}w_1(\mathbf{x}) = e^{-ikr}u_1(\mathbf{x}).$$

Combining these results we see that (2.11) is indeed satisfied. Let us also notice the following lemma.

**Lemma:** *An entire radiation function  $u(p)$  must vanish identically.*

To prove this observe that for an arbitrary  $p$  we have  $u(p) = v_1(p)$  where  $v_1(p)$  is the surface integral (2.10) taken over any closed surface  $\mathfrak{S}$  not containing  $p$ , since  $u$  is entire. On making  $\mathfrak{S}$  shrink to a point we get  $u(p) = 0$ .

The lemma shows that any decomposition of a Helmholtz wave function into a sum of a radiation function and an entire wave function is unique. Hence, we can summarize our results on Helmholtz wave functions as follows.

**Theorem 3:** *Every Helmholtz wave function  $u(p)$  for an exterior domain  $\mathfrak{B}$  has a unique decomposition*

$$u(p) = u_1(p) + v_1(p)$$

where  $u_1(p)$  is an entire Helmholtz wave function and  $v_1(p)$  is a radiation function for  $\mathfrak{B}$ . The functions  $u_1$  and  $v_1$  are given by (2.7) and (2.10) respectively.

### § 3. A Radiation Condition for the Diffraction Problem

The principal result of this section is

**Theorem 4:** *The diffraction wave function  $u(p)$ , defined by*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{ikt} \varphi(p, t) = u(p),$$

*is necessarily a radiation function.*

For the proof we consider the pulse wave function  $\varphi_0(p, t)$ . If  $r_0(p)$  is the least radius such that  $\mathfrak{S}(p, r_0(p))$  contains the boundary  $\mathfrak{S}$  of  $\mathfrak{B}$  and the set of points where  $f(p, k) = -\frac{\partial \varphi_0(p, 0+)}{\partial t} \neq 0$  then  $\tilde{\varphi}_0(p, t, r)$  is defined for  $r > r_0(p)$ ,  $t > 0$  and

$$(3.1) \quad \tilde{\varphi}_0(p, t, r) = \frac{F(p, r-t) + G(p, r+t)}{r}$$

there. Notice that  $F(p, \tau)$  is defined for all  $\tau$  while  $G(p, \tau)$  is defined for  $\tau > r_0(p)$ . Moreover, we know that  $\varphi_0(p, t) \equiv 0$  outside  $\mathfrak{S}(p, r_0(p) + t)$ , by Theorem 1, whence  $\tilde{\varphi}_0(p, t, r) \equiv 0$  for  $r > r_0(p) + t$ . Thus

$$G(p, r+t) = -F(p, r-t) \quad \text{for } r > r_0(p) + t,$$

or

$$G(p, \tau + 2t) = -F(p, t) \quad \text{for } \tau > r_0(p) \quad \text{and } t > 0.$$

This shows that  $G(p, \tau)$  is independent of  $\tau$  for all  $\tau > r_0(p)$ , i.e., on its whole domain of definition. Hence, since a constant may be regarded as a function of  $r-t$ , we can combine  $G$  with  $F$  in (3.1) and write

$$(3.2) \quad \tilde{\varphi}_0(p, t, r) = \frac{F(p, r-t)}{r}, \quad r > r_0(p), \quad t > 0.$$



Also, since  $\tilde{\varphi}_0(p, t, r) \equiv 0$  for  $r - \tau > r_0(p)$ , we see that

$$(3.3) \quad F(p, \tau) \equiv 0 \quad \text{for } \tau > r_0(p).$$

Let us see that these results imply for the diffraction wave function  $u(p)$ . We have

$$u(p) = \int_0^\infty e^{ik t} \varphi_0(p, t) dt.$$

On integrating this identity over  $\mathfrak{S}(p, r)$  and reversing the order of the integrations we get

$$\begin{aligned} \tilde{u}(p, r) &= \int_0^\infty e^{ik t} \tilde{\varphi}_0(p, t, r) dt = \int_0^\infty e^{ik t} \frac{F(p, r-t)}{r} dt \\ &= \frac{e^{ik r}}{r} \int_{-\infty}^r e^{-ik \tau} F(p, \tau) d\tau = \frac{e^{ik r}}{r} \int_{-\infty}^\infty e^{-ik \tau} F(p, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

where at the last step we assume that  $r > r_0(p)$  and use (3.3). On comparing this with the general form (2.6) for  $\tilde{u}(p, r)$  we see that  $u_1(p) \equiv 0$ , which proves Theorem 4.

Our result suggests that  $u_1(p) \equiv 0$  is a "natural" radiation condition for the diffraction problem as formulated in Sect. 1. In the next section we compare this with other radiation conditions, including SOMMERFELD'S. In particular, we shall prove that the conditions

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= f \quad \text{in } \mathfrak{B} \\ u &= 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \mathfrak{S} \\ u_1 &= 0 \end{aligned}$$

characterize the diffraction wave function uniquely, by showing that  $u_1(p) \equiv 0$  implies the usual Sommerfeld condition (Theorem 5).

#### § 4. Other Radiation Conditions

We shall refer to the equation  $u_1(p) \equiv 0$  as R. C. 1 to distinguish it from the other radiation conditions we are about to introduce. A more explicit statement of R. C. 1 is derivable from (2.7). It is

$$\text{R. C. 1} \quad \int_{\mathfrak{S}(p, r)} \left\{ \frac{\partial(ru)}{\partial r} - ikru \right\} dS = 0 \quad \text{for all } p \text{ and } r > r_0(p).$$

Now, notice that solutions of the Helmholtz equation in  $\mathfrak{B}$  satisfy the identity

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \int_{\mathfrak{S}(p, r)} \left\{ \frac{\partial(ru)}{\partial r} - ikru \right\} dS &= \frac{1}{r} \int_{\mathfrak{S}(p, r)} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - ik u \right) dS + \\ &+ \frac{2\pi i}{k} \left\{ \frac{e^{-ikr}}{r} u_1(p) - \frac{e^{ikr}}{r} u_2(p) \right\}. \end{aligned}$$

Hence, since the last term on the right tends to zero with  $1/r$  for each  $p$ , R.C. 1 implies

$$\text{R.C. 2} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_{\mathfrak{S}(p,r)} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right) dS = 0 \quad \text{for all } p.$$

Conversely, since the term on the left equals  $4\pi e^{-ikr} u_1(p)$ , we see that R.C. 2 implies R.C. 1. Thus R.C. 1 and R.C. 2 are equivalent.

Next, if we apply SCHWARZ's inequality to the integral in R.C. 2, we get

$$\left| \frac{1}{r} \int_{\mathfrak{S}(p,r)} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right) dS \right|^2 \leq 4\pi \int_{\mathfrak{S}(p,r)} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right|^2 dS.$$

Thus R.C. 2 is implied by

$$\text{R.C. 3} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{S}(p,r)} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right|^2 dS = 0 \quad \text{for all } p.$$

Since

$$\int_{\mathfrak{S}(x,r)} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right|^2 dS = \int_{\Omega} \left| r \left\{ \frac{\partial u(x+r\hat{r})}{\partial r} - i k u(x+r\hat{r}) \right\} \right|^2 d\Omega$$

we see that R.C. 3 is implied by

$$\text{R.C. 4} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right) = 0 \quad \text{for all } x, \text{ uniformly in } \hat{r}.$$

This is SOMMERFELD's radiation condition. Finally, we state a weakened version of R.C. 3:

$$\text{R.C. 5} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{S}(O,r)} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right|^2 dS = 0 \quad \text{for a single center } O.$$

The author has found no discussion in the literature about whether SOMMERFELD's condition is to hold for only one, or more than one, center. However, in deriving results like the representation theorem, representing  $u$  in terms of a surface integral (2.10), it is always tacitly assumed to hold for all centers [1, 9, 14]. On the other hand, RELICH proved his uniqueness theorem [7] using only R.C. 5, which suggests that R.C. 5 may imply the stronger conditions. We verify this by proving.

**Theorem 5:** *Let  $u(p)$  satisfy the Helmholtz equation in an exterior domain  $\mathfrak{B}$ . Then Radiation Conditions 1 through 5 are equivalent for  $u$ ; i.e., each implies all the others.*

*Proof:* We have seen that R.C. 1 and R.C. 2 are equivalent and that R.C. 3 and R.C. 4 imply R.C. 2 and R.C. 1. Moreover, R.C. 1 implies the representation theorem and hence the expansion theorem [14] which states that for spherical coordinates  $(r, \hat{r})$  relative to an arbitrary origin,

$$u(p) = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\hat{r})}{r^n} \quad \text{in } r > c,$$

where the series converges uniformly and can be differentiated term by term any number of times, the resulting series all converging uniformly. This makes it clear that R.C. 1 implies conditions R.C. 2 through R.C. 5. It remains to prove that R.C. 5 implies R.C. 1.

We must show that R.C. 5 implies  $u_1(p) \equiv 0$ . To do this let us use (2.8), taking for  $\mathfrak{S}'$  the sphere  $\mathfrak{S}(O, r)$  of R.C. 5. Then  $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{r}}$  and so

$$\begin{aligned} 4\pi u_1(p) &= \int_{\mathfrak{S}(O, r)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} \frac{e^{ikR}}{R} - u \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right\} dS \\ &= \int_{\mathfrak{S}(O, r)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} \frac{e^{ikR}}{R} - u \left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{\partial R}{\partial r} \frac{e^{ikR}}{R} \right\} dS = \int_{\Omega} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} - ik u \right) \times \\ &\quad \times \frac{r}{R} e^{ikR} d\Omega + ik \int_{\Omega} r u \left( 1 - \frac{\partial R}{\partial r} \right) \frac{r}{R} e^{ikR} d\Omega + \int_{\Omega} u \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial R}{\partial r} e^{ikR} d\Omega, \end{aligned}$$

where the last integrals are with respect to solid angle  $\Omega$  viewed from  $O$ . Let us write

$$4\pi u_1(p) = I_1 + I_2 + I_3,$$

where  $I_1, I_2$ , and  $I_3$  are the last three integrals, and estimate these terms separately. Notice that

$$R \geq r - d \quad \text{or} \quad \frac{r}{R} \leq 1 + \frac{d}{R}$$

where  $d$  is the distance from  $p$  to  $O$ . Thus  $\frac{r}{R} \leq 2$  for  $R \geq d$ . On using this estimate and SCHWARZ'S inequality we get

$$|I_1|^2 \leq 8\pi \int_{\mathfrak{S}(O, r)} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - ik u \right|^2 dS,$$

whence  $\lim_{r \rightarrow \infty} I_1 = 0$ , by R.C. 5. By the same reasoning

$$|I_2|^2 \leq 4k^2 \int_{\Omega} |ru|^2 d\Omega \int_{\Omega} \left| 1 - \frac{\partial R}{\partial r} \right|^2 d\Omega.$$

Now R.C. 5 implies  $\int_{\Omega} |u|^2 d\Omega = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$  [14]. Moreover,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial R}{\partial r} = 1$  uniformly on  $\Omega$ , as is easily verified. Thus  $\lim_{r \rightarrow \infty} I_2 = 0$ . Finally, since  $\left| \frac{\partial R}{\partial r} \right| \leq 1$ ,

$$|I_3|^2 \leq 64\pi \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \text{by R.C. 5 [14],}$$

whence  $\lim_{r \rightarrow \infty} I_3 = 0$ . Collecting these estimates we have  $\lim_{r \rightarrow \infty} u_1(p) = 0$ . Thus, since  $u_1(p)$  is independent of  $r$ ,  $u_1(p) \equiv 0$ , which completes the proof.

## § 5. The Vector Diffraction Problem

The initial-boundary value problem for vector, or electromagnetic, waves with time-harmonic sources is to find the vector fields  $\mathbf{E}(p, t)$  and  $\mathbf{H}(p, t)$  uniquely characterized by the conditions

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = e^{-ikt} \mathbf{F}(p, k), \quad p \text{ in } \mathfrak{B}, \quad t > 0,$$

$$\mathbf{E}(p, 0+) = 0, \quad \mathbf{H}(p, 0+) = 0, \quad p \text{ in } \mathfrak{B},$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}(p, t) = 0 \quad \text{on } \mathfrak{S}, \quad t \geq 0.$$



Here  $\mathbf{n}$  is a normal vector to  $\mathfrak{S}$ , and we assume that  $\mathbf{F}(p, k)$  vanishes outside a sphere. The corresponding pulse solution is defined by

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_0 + \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial t} &= 0, & \nabla \times \mathbf{H}_0 - \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} &= 0, & p \text{ in } \mathfrak{B}, t > 0, \\ \mathbf{E}_0(p, 0+) &= -\mathbf{F}(p, k), & \mathbf{H}_0(p, 0+) &= 0, & p \text{ in } \mathfrak{B}, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0(p, t) &= 0 \quad \text{on } \mathfrak{S}, & t &\geq 0.\end{aligned}$$

The problems are related by

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(p, t) &= \int_0^t \mathbf{E}_0(p, t - \tau) e^{-ik\tau} d\tau, \\ \mathbf{H}(p, t) &= \int_0^t \mathbf{H}_0(p, t - \tau) e^{-ik\tau} d\tau,\end{aligned}$$

as in the scalar case, and if the integrals

$$\int_0^\infty e^{ikt} \mathbf{E}_0(p, t) dt \quad \text{and} \quad \int_0^\infty e^{ikt} \mathbf{H}_0(p, t) dt$$

exist then

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(p, t) &= \mathbf{A}(p, t) + e^{-ikt} \mathbf{A}(p), \\ \mathbf{H}(p, t) &= \mathbf{B}(p, t) + e^{-ikt} \mathbf{B}(p)\end{aligned}$$

where  $\mathbf{A}(p, t)$  and  $\mathbf{B}(p, t)$  are transient and

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(p) &= \int_0^\infty e^{ikt} \mathbf{E}_0(p, t) dt, \\ \mathbf{B}(p) &= \int_0^\infty e^{ikt} \mathbf{H}_0(p, t) dt.\end{aligned}$$

Finally, we can verify that

$$(5.1) \quad \begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} + ik\mathbf{B} &= \mathbf{F}, & \nabla \times \mathbf{B} - ik\mathbf{A} &= 0, & p \text{ in } \mathfrak{B}, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{A}(p) &= 0 \quad \text{on } \mathfrak{S},\end{aligned}$$

but that these conditions fail to determine the fields uniquely.

A radiation condition that provides a unique solution to (5.1) was discovered by S. SILVER [8] and, independently, by C. MÜLLER [6]. It is

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \{ \hat{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + ik\mathbf{A} \} = 0, \quad \text{uniformly in } \hat{\mathbf{r}}.$$

We shall show that the diffraction field  $\mathbf{A}$  defined above must satisfy the Silver-Müller condition.

If  $\mathfrak{S}(p, r_0(p))$  contains  $\mathfrak{S}$  and the set on which  $F(p, k) \neq 0$  then  $u = \nabla \cdot \mathbf{E}_0$  and  $v = \nabla \cdot \mathbf{H}_0$  satisfy  $\partial u / \partial t = \partial v / \partial t = 0$  and  $u(p, 0+) = v(p, 0+) = 0$  at points outside  $\mathfrak{S}(p, r_0(p))$ . Thus  $\nabla \cdot \mathbf{E}_0(p, t) = \nabla \cdot \mathbf{H}_0(p, t) = 0$  outside  $\mathfrak{S}(p, r_0(p))$  for  $t > 0$  and therefore

$$\left. \begin{aligned}\Delta \mathbf{E}_0 - \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial t^2} &= 0 \\ \mathbf{E}_0(p, 0+) &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}_0(p, 0+)}{\partial t} = 0\end{aligned} \right\} \text{outside } \mathfrak{S}(p, r_0(p)).$$

It follows by Theorem 1 that  $\mathbf{E}_0(p, t) \equiv 0$  outside  $\mathfrak{S}(p, r_0(p) + t)$ . This implies

$$\text{R.C. 1} \quad \int_{\mathfrak{S}(p, r)} \left\{ \frac{\partial(r\mathbf{A})}{\partial r} - i k r \mathbf{A} \right\} dS = 0 \quad \text{for all } p \text{ and } r > r_0(p),$$

exactly as in the scalar case. To relate this to the Silver-Müller condition we use the identity

$$\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) - \frac{\partial(r\mathbf{A})}{\partial r}, \quad \mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}},$$

valid for all fields  $\mathbf{A}$  of Class  $C^1$ , which is easily verified by using rectangular coordinates. This gives

$$r \{ \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}) + i k \mathbf{A} \} = \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) - \left\{ \frac{\partial(r\mathbf{A})}{\partial r} - i k r \mathbf{A} \right\}.$$

Notice that on identifying  $p$  with its position vector  $\mathbf{x}_0$  and the integration point  $q$  with  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}$ , so that  $\mathbf{A}(q) = \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{x}_0)$ , we have

$$\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} + \nabla_0(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}),$$

where  $\nabla_0$  refers to  $\mathbf{x}_0$ . Moreover

$$\int_{\Omega} \nabla_0(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) d\Omega = \nabla_0 \left\{ \frac{r}{i k} \int_{\mathfrak{S}(p, r)} \hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dS \right\} = 0,$$

by MAXWELL'S equations (5.1) and STOKES' theorem. Thus

$$\frac{1}{r^2} \int_{\mathfrak{S}(p, r)} \left\{ \frac{\partial(r\mathbf{A})}{\partial r} - i k r \mathbf{A} \right\} dS = -\frac{1}{r} \int_{\mathfrak{S}(p, r)} \{ \hat{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + i k \mathbf{A} \} dS + \tilde{\mathbf{A}}(p, r)$$

where

$$\tilde{\mathbf{A}}(p, r) = \mathbf{A}_1(p) \frac{e^{i k r}}{r} + \mathbf{A}_2(p) \frac{e^{-i k r}}{r} = O\left(\frac{1}{r}\right).$$

It follows that R.C. 1 is equivalent to

$$\text{R.C. 2} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_{\mathfrak{S}(p, r)} \{ \hat{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + i k \mathbf{A} \} dS = 0 \quad \text{for all } p.$$

The remainder of the discussion parallels that for the scalar case and the details are omitted. As a final result we can state the following analogue of Theorem 5. (Cf. also [15]).

**Theorem 6:** Let  $\mathbf{A}(p)$  satisfy the vector Helmholtz equation

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - k^2 \mathbf{A} = 0$$

in an exterior domain  $\mathfrak{R}$ . Then conditions R.C. 1, R.C. 2, the Silver-Müller condition and

$$\text{R.C. 3} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{S}(O, r)} | \hat{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + i k \mathbf{A} |^2 dS = 0$$

for a single center  $O$ , are all equivalent for  $\mathbf{A}$ .

## References

- [1] BAKER, B. B., & E. T. COPSON: The Mathematical Theory of HUYGENS' Principle. 2<sup>nd</sup> Ed. Oxford 1950.
- [2] COURANT, R., & D. HILBERT: Methoden der Mathematischen Physik, vol. 2. Berlin: Springer 1937.
- [3] KLINE, M.: An Asymptotic Solution of MAXWELL's Equations. Comm. on Pure and Appl. Math. **4**, 225—262 (1951).
- [4] KLINE, M.: Asymptotic Solution of Linear Hyperbolic Partial Differential Equations. J. Rational Mech. and Anal. **3**, 315—342 (1954).
- [5] LUNEBURG, R. K.: Asymptotic Development of Steady State Electromagnetic Fields. New York University, Math. Research Group, Research Report EM-14 (1949).
- [6] MÜLLER, C.: Die Grundzüge einer mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Arch. Math. **1**, 296—302 (1948—1949).
- [7] RELICH, F.: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von  $\Delta u + ku = 0$  in unendlichen Gebieten. Jber. Deutsch. Math. Verein. **53**, 57—64 (1943).
- [8] SILVER, S. (Ed.): Microwave Antenna Theory and Design. M.I.T. Radiation Laboratory Series, vol. 12. New York: McGraw-Hill 1949.
- [9] SOMMERFELD, A.: Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jber. Deutsch. Math. Verein. **21**, 309—353 (1912).
- [10] SOMMERFELD, A.: Partial Differential Equations in Physics. New York: Academic Press 1949.
- [11] STOKER, J. J.: Some remarks on radiation conditions, in Proc. of Symposia in Appl. Math., vol. 5, Wave Motion and Vibration Theory, 97—102. New York: McGraw-Hill 1954.
- [12] STOKER, J. J.: Water Waves. New York: Interscience Publishers 1957.
- [13] WEBSTER, A. G.: Partial Differential Equations of Mathematical Physics, 2<sup>nd</sup> Ed., republished by Dover Publications, New York 1955.
- [14] WILCOX, C. H.: A Generalization of Theorems of RELICH and ATKINSON. Proc. A.M.S. **7**, 271—276 (1956).
- [15] WILCOX, C. H.: An Expansion Theorem for Electromagnetic Fields. Comm. on Pure and Appl. Math. **9**, 115—134 (1956).

Mathematics Research Center-U.S. Army  
 University of Wisconsin  
 Madison, Wisconsin  
 and  
 California Institute of Technology  
 Pasadena, California

(Received January 2, 1959)

# Untersuchungen zur Durchführung der konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete

DIETER GAIER

Vorgelegt von L. COLLATZ

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	
Kapitel I. Vorbereitende Sätze	
§ 1. Hilfssätze für Ringgebiete . . . . .	150
§ 2. Eine Abschätzung von SPECHT . . . . .	152
Kapitel II. Über die konforme Abbildung nahezu kreisringförmiger und nahezu kreisförmiger Gebiete	
§ 3. Zusammenhang konjugierter Funktionen im Kreisring . . . . .	152
§ 4. Konforme Abbildung nahezu kreisringförmiger Gebiete . . . . .	155
§ 5. Konforme Abbildung nahezu kreisförmiger Gebiete . . . . .	157
Kapitel III. Funktionentheoretische Iterationsverfahren zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete	
§ 6. Spiegelung von Gebieten . . . . .	161
§ 7. Das „iterierende Verfahren“ von KOEBE . . . . .	163
§ 8. Das „Iterationsverfahren“ von KOEBE . . . . .	167
§ 9. Iterationsverfahren für Ringgebiete . . . . .	169
§ 10. Anhang . . . . .	173
Literatur . . . . .	177

## Einleitung

In den Jahren 1908 bis 1920 hat P. KOEBE in einer Reihe von Arbeiten das Problem behandelt, ein  $n$ -fach zusammenhängendes Gebiet  $G$  mit  $\infty \in G$  auf ein nur von Kreisen berandetes, sog. Vollkreisgebiet  $V$  konform und in  $\infty$  normiert abzubilden. Zur Lösung dieser Aufgabe schlägt er zwei Iterationsverfahren vor, das „iterierende Verfahren“ und das „Iterationsverfahren“, deren Hauptgedanke es ist, die gesuchte Abbildung durch Hintereinanderschaltung einer Folge von konformen Abbildungen einfach zusammenhängender Gebiete zu gewinnen. Wir wollen diese Verfahren funktionentheoretische Iterationsverfahren nennen, im Unterschied zu Methoden, die z.B. im Fall  $n=2$  auf die Lösung eines Paares von Integralgleichungen abzielen ([7]; [8], S. 137–147).

Da es KOEBE in erster Linie auf die Existenz der Vollkreisabbildung ankam, konnte er sich mit einem bloßen Konvergenzbeweis für seine Iterationsverfahren begnügen. Die Geschwindigkeit der Konvergenz und die Frage der gleichmäßigen



Konvergenz in ganz  $G$  blieben demgemäß außer Betracht. Vom praktischen Standpunkt aus sind jedoch solche Fehlerabschätzungen erwünscht, weil sie ein Urteil über die Güte des Verfahrens erlauben, selbst dann, wenn jeder Iterationsschritt wieder nur angenähert ausgeführt werden kann, wie das in der Praxis der Fall ist<sup>1</sup>.

In Kapitel III dieser Arbeit soll nun gezeigt werden, wie die Grundidee KOEBES, die sich durch das Stichwort „Erhöhung der Spiegelungsfähigkeit der Bilder von  $G$ “ markieren läßt, beweistechnisch so verfeinert werden kann, daß man zu brauchbaren Fehlerabschätzungen kommt. Wichtige Hilfsmittel dazu sind die Sätze 1.1 und 1.2 von Kapitel I. Außerdem sollen in Kapitel III die zu den Koebeschen analogen Verfahren bei Normierung im endlichen auf ihre Konvergenzgeschwindigkeit untersucht werden (§ 9, **B** und **C**), wobei sich im einen Falle eine Verbesserung früherer Abschätzungen [5] zum Verfahren von KOMATU ergibt. Für einige der in Kapitel III angegebenen Iterationsverfahren sind Arbeiten im Gange mit dem Ziel, an einfachen Beispielen die Güte der gewonnenen Abschätzungen nachzuprüfen; vgl. dazu auch § 10.

Unabhängig davon betrachten wir in Kapitel II hauptsächlich konforme Abbildungen nahezu kreisringförmiger Gebiete auf Kreisinge. Darin wird die Aussage präzisiert: Ist  $G$  ein nahezu kreisringförmiges Gebiet und  $f(z)$  die (normierte) konforme Abbildung dieses Kreisinges auf  $G$ , so ist  $f(z)$  „nahe bei“ der Identität  $z$ . Ein erstes Ergebnis zu diesem Thema [5] wird dabei verbessert. In § 5 findet sich weiter eine Aussage über das Verhalten der (normierten) Abbildungsfunktion eines Gebiets, das von  $|w| < 1$  „wenig abweicht“. Die Abweichung findet dabei nicht wie gewöhnlich bei  $|w| = 1$  statt;  $G$  wird sogar von  $|w| = 1$  berandet, aber außerdem noch von einem in  $|w| < \varrho$  verlaufenden Randkontinuum ( $\varrho$  klein), so daß  $G$  zwar ein Ringgebiet ist, aber doch von  $|w| < 1$  „wenig abweicht“.

## I. Vorbereitende Sätze

Als Vorbereitung für unsere späteren Untersuchungen wollen wir zunächst einige Sätze zusammenstellen, deren Inhalt zum größten Teil bekannt ist.

### § 1. Hilfssätze für Ringgebiete

**A.** Wir beginnen mit der Behandlung zweier Extremalprobleme für endliche Ringgebiete.

**Satz 1.1.** *Es sei  $G$  ein endliches Ringgebiet vom Modul  $M (> 1)$  mit der inneren bzw. äußeren Randkomponente  $C_1$  bzw.  $C_2$ . Bezeichnet dann  $F(C_i)$  den von  $C_i$  umschlossenen Flächeninhalt ( $i = 1, 2$ )<sup>2</sup>, so gilt*

$$(1.1) \quad F(C_1) \leq \frac{1}{M^2} \cdot F(C_2).$$

*Hierbei tritt das Gleichheitszeichen genau dann ein, wenn  $G$  ein konzentrischer Kreising mit dem Radienverhältnis  $M$  ist.*

<sup>1</sup> Eine Vollkreisabbildung eines zweifach zusammenhängenden Gebiets nach dem iterierenden Verfahren hat LÖSCH in [19] durchgeführt.

<sup>2</sup> Falls der Flächeninhalt nicht existiert, so ist für  $i = 1$  der äußere, für  $i = 2$  der innere Peano-Jordan-Inhalt zu nehmen.

Der Satz stammt von CARLEMAN ([3], S. 212) und wird am besten über einen Flächensatz bewiesen; vgl. dazu [10], S. 177 und [9]. In [21], S. 192 wird (1.1) mit Hilfe des Prinzips der zirkularen Symmetrisierung gewonnen, und schließlich sei noch bemerkt, daß Satz 1.1 einen Teil der Ergebnisse in [4] enthält, da dort  $C_1$  als Kreis angenommen ist.

Etwas tiefer liegend ist folgender

Satz 1.2. *Es bezeichne  $D(C_1)$  den Durchmesser der Randkomponente  $C_1$  von  $G$  aus Satz 1.1. Dann gilt*

$$(1.2) \quad [D(C_1)]^2 \leq K(M) \cdot F(C_2) \quad \text{mit} \quad K(M) = \frac{16}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{M^{2n}}{n(M^{4n}-1)}.$$

Über die Annahme des Gleichheitszeichens läßt sich sagen: Wird  $1 < |z| < M^2$  durch  $w = f_0(z)$  auf einen zur  $u$ -Achse ( $w = u + iv$ ) symmetrischen und längs  $-1 \leq u \leq +1$  geschlitzten Parallelstreifen konform abgebildet, so tritt in (1.2) sicher dann Gleichheit ein, wenn  $G$  von  $C_1$ :  $-1 \leq u \leq +1$  sowie von  $C_2$ :  $f_0(|z| = M)$  berandet wird. Jedes weitere Extremalgebiet ergibt sich daraus durch eine ganze lineare Abbildung.

Diesen Satz 1.2 hatten wir in einer vorbereitenden Arbeit [6] mit Hilfe des Prinzips der zirkularen Symmetrisierung und Sätzen von AHLFORS und SCHIFFER bewiesen. Dabei läßt sich  $K(M)$  geschlossen angeben:  $K(M) = -\frac{2}{\pi} \log k'$ , wenn  $k'$  den zu  $k = k(M^{-2})$  komplementären Modul bezeichnet. Das asymptotische Verhalten von  $K(M)$  läßt sich durch

$$K(M) \cong \frac{16}{\pi} \cdot \frac{1}{M^2} \quad (M \rightarrow +\infty)$$

und

$$K(M) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M-1} + \frac{\pi}{4} + O(M^{-1}) \quad (M \rightarrow 1+)$$

charakterisieren; [6] enthält außerdem eine kleine Tabelle für  $K(M)$ . Schließlich bringt eine direkte Abschätzung von  $[D(C_1)]^2/F(C_2)$  mit geläufigen length-area-Methoden  $K(M) < \frac{\pi}{2 \cdot \log M} (M > 1)$ ; die Abschätzung ist für nahe bei 1 liegende Werte von  $M$  recht scharf.

Für unsere Anwendungen von Satz 1.2 im Kapitel III merken wir noch an: Für wachsendes  $M$  fällt  $K(M)$  monoton. Dies ergibt sich aus der Reihendarstellung für  $K(M)$  sofort.

B. Mit dem Fragenkreis des „nächsten Randpunkts“ bei Ringgebieten hängt eng zusammen

Satz 1.3. *Es sei  $G$  ein endliches Ringgebiet vom Modul  $\frac{1}{r} (> 1)$ , welches außen von  $|w| = 1$  berandet wird und das  $w = 0$  nicht enthält. Dann liegen alle Punkte der inneren Randkomponente  $C_1$  von  $G$  im Kreis  $|w| < \frac{4r}{1+4r^2}$ , falls  $r \leq \frac{1}{2}$  ist.*

Beweis. Bekanntlich<sup>3</sup> wird der Abstand von Punkten von  $C_1$  vom Nullpunkt dann maximal, wenn  $C_1$  eine Strecke  $0 \leq w \leq A(r)$  ist, so daß  $A(r)$  abzuschätzen bleibt. Nun kann man aber das von  $|w| = 1$  und dieser Strecke berandete

<sup>3</sup> Vgl. dazu das „Problem des nächsten Randpunkts“ in [11] sowie bei TEICHMÜLLER [23], insbesondere S. 631–633.

Gebiet dadurch erhalten, daß man das von  $|\omega|=1$  und  $-L(r) \leq \omega \leq +L(r)$  berandete Gebiet der linearen Abbildung  $w = \frac{\omega+L}{1+\omega L}$  unterwirft, wobei dann  $A(r) = \frac{2L(r)}{1+L^2(r)}$  wird. Wegen

$$L(r) = 2r \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+r^{8n}}{1+r^{8n-4}} \right)^2 < 2r$$

([20], S. 293–295) ist daher  $A(r) < \frac{4r}{1+4r^2}$ , da  $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  in  $0 \leq x \leq 1$  monoton wächst. — Da  $r < |w| < 1$  den Modul  $1/r$  hat, sieht man, daß stets  $A(r) > r$  ist;  $A(r) < \frac{4r}{1+4r^2}$  gilt also für nahe bei 1 liegende  $r$  nicht mehr.

### § 2. Eine Abschätzung von SPECHT

In § 4 werden wir auf folgende spezielle Abschätzung zurückgreifen, die SPECHT ([22], S. 187–188) im Verlaufe der Untersuchung konformer Abbildungen nahezu kreisförmiger Gebiete bewiesen hat.

Satz 2.1. Die Funktion  $\varrho(\varphi)$  sei mit  $2\pi$  periodisch, in  $\langle 0, 2\pi \rangle$  absolut stetig, und es gelte

$$\varrho(\varphi) \geq \delta > 0 \quad \text{sowie} \quad \left| \frac{\varrho'(\varphi)}{\varrho(\varphi)} \right| \leq K \quad \text{für fast alle } \varphi.$$

Die Funktion  $\varphi(t)$  sei in  $\langle 0, 2\pi \rangle$  absolut stetig und monoton wachsend, und  $\varphi(t) - t$  sei mit  $2\pi$  periodisch. Dann gilt für fast alle  $\vartheta$

$$(2.1) \quad \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \varrho(\varphi(t)) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt \right| \leq K \left[ 2 \log 2 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi(t) - t) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt \right].$$

Der Beweis erfolgt durch zweimalige partielle Integration.

## II. Über die konforme Abbildung nahezu kreisringförmiger und nahezu kreisförmiger Gebiete

Wird ein mit  $|w| < 1$  nahezu übereinstimmendes Gebiet  $G$  durch  $w = f(z)$  konform und normiert auf  $|z| < 1$  abgebildet, so ist zu erwarten, daß (unter genaueren Annahmen)  $|f(z) - z|$  klein ist. Einen entsprechenden Satz für Ringgebiete hatten wir schon in [5], S. 873–877 bewiesen, doch ließ die dort durchgeführte Reduktion auf den Fall einfachen Zusammenhangs nur die Größenordnung von  $|f(z) - z|$  ohne brauchbare Konstanten abschätzen. Das Problem soll deshalb erneut aufgegriffen werden, obwohl dies für Kapitel III nicht erforderlich wäre, und es wird sich zeigen, daß wir unter Benützung von Zusammenhängen konjugierter Funktionen im Kreisring auf direktem Wege zu brauchbaren Abschätzungen für  $|f(z) - z|$  kommen können.

### § 3. Zusammenhang konjugierter Funktionen im Kreisring

Gegeben sei eine in  $R < |z| < 1$  reguläre und in  $R \leq |z| \leq 1$  stetige Funktion  $f(z) = u(re^{i\vartheta}) + iv(re^{i\vartheta})$ . Wir benötigen zunächst verschiedene Zusammenhänge zwischen den Funktionen  $u$  und  $v$  auf dem Rand unseres Kreisrings.

Satz 3.1. Ist  $f(z)$  in  $R < |z| < 1$  regulär, in  $R \leq |z| \leq 1$  stetig, so gilt

$$(3.1) \quad f(e^{i\vartheta}) = A(\vartheta) + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi),$$

wobei

$$(3.2) \quad A(\vartheta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) \cdot \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z} \frac{dz}{z} \quad \text{und also} \quad |A(\vartheta)| \leq \frac{1+R}{1-R} \max_{|z|=R} |f(z)|$$

gilt.

Eine Zerlegung von (3.1) in Real- und Imaginärteil ergibt

$$(3.1a) \quad u(e^{i\vartheta}) = \Re A(\vartheta) + \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(e^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt,$$

$$(3.1b) \quad v(e^{i\vartheta}) = \Im A(\vartheta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt;$$

sämtliche auch im folgenden auftretenden uneigentlichen Integrale sind als Cauchysche Hauptwerte zu nehmen.

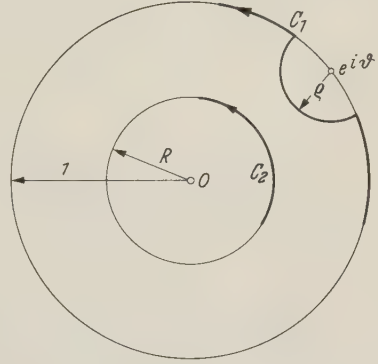


Fig. 1

Entsprechend lautet der Zusammenhang zwischen  $u$  und  $v$  auf  $|z| = R$ :

Satz 3.1'. Ist  $f(z)$  in  $R < |z| < 1$  regulär, in  $R \leq |z| \leq 1$  stetig, so gilt

$$(3.1') \quad f(Re^{i\vartheta}) = B(\vartheta) + \frac{-i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi),$$

wobei

$$(3.2') \quad B(\vartheta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z) \cdot \frac{z+Re^{i\vartheta}}{z-Re^{i\vartheta}} \frac{dz}{z} \quad \text{und also} \quad |B(\vartheta)| \leq \frac{1+R}{1-R} \max_{|z|=1} |f(z)|$$

gilt.

Eine Zerlegung von (3.1') in Real- und Imaginärteil ergibt

$$(3.1'a) \quad u(Re^{i\vartheta}) = \Re B(\vartheta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(Re^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt,$$

$$(3.1'b) \quad v(Re^{i\vartheta}) = \Im B(\vartheta) + \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt.$$

Man erkennt, daß z.B. durch (3.1a) die zu  $v$  im Ring konjugierte Funktion  $u$  in Zusammenhang gebracht wird mit der zu  $v$  in  $|z| < 1$  konjugierten Funktion, mit einer durch  $\Re A(\vartheta)$  ausgedrückten Korrektur.

Wir beweisen etwa die Beziehung (3.1). Mit den Bezeichnungen von Fig. 1 gilt

$$\begin{aligned} A(\vartheta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} f(z) \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(z) \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z} \frac{dz}{z} \\ &\rightarrow f(e^{i\vartheta}) + \frac{-i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt \quad (\varrho \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Daraus folgt (3.1) unmittelbar. Der Beweis von (3.1') verläuft entsprechend.



Die eben abgeleiteten Formeln (3.1) und (3.1') haben noch den Nachteil, daß die in ihnen vorkommenden Korrekturen  $A(\vartheta)$ ,  $B(\vartheta)$  noch von  $u$  und  $v$  abhängen. Wir leiten nun zwei zu (3.1b) und (3.1'b) entsprechende Beziehungen ab, in welchen sich die Korrektur *allein* durch  $u$  ausdrückt.

Satz 3.2. Ist  $f(z)$  in  $R < |z| < 1$  regulär, in  $R \leq |z| \leq 1$  stetig, so gilt mit einer Konstanten  $\beta_0$

$$(3.3) \quad v(R e^{i\vartheta}) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{R^n - R^{-n}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{u(e^{it}) - R^n u(R e^{it})\} \cdot \sin n(t - \vartheta) dt + \\ + \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R e^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - t}{2} dt,$$

$$(3.4) \quad v(e^{i\vartheta}) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{R^n - R^{-n}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{R^n u(e^{it}) - u(R e^{it})\} \cdot \sin n(t - \vartheta) dt + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - t}{2} dt.$$

Zum Beweis knüpfen wir an eine zunächst für  $R < r < 1$  gültige Darstellungsformel von VILLAT [24] an. Setzt man

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \cos nt dt, \quad a'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R e^{it}) \cos nt dt \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \sin nt dt, \quad b'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R e^{it}) \sin nt dt \quad (n \geq 1),$$

so gilt für  $R < r < 1$

$$v(r e^{i\vartheta}) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r/R)^n + (r/R)^{-n}}{R^n - R^{-n}} (b_n \cos n\vartheta - a_n \sin n\vartheta) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n + r^{-n}}{R^n - R^{-n}} (b'_n \cos n\vartheta - a'_n \sin n\vartheta).$$

Wir untersuchen diese Relation bei festem  $\vartheta$  für  $r \rightarrow 1-$ . Eine Anwendung des Abelschen Stetigkeitssatzes zeigt, daß die zweite Reihe den Grenzwert

$$-2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^n - R^{-n}} (b'_n \cos n\vartheta - a'_n \sin n\vartheta)$$

besitzt. Um die erste Reihe zu beurteilen, schreiben wir

$$\frac{(r/R)^n + (r/R)^{-n}}{R^n - R^{-n}} = -r^n + \frac{(R/r)^n + (r/R)^n}{R^n - R^{-n}},$$

so daß der vom zweiten Term herrührende Beitrag den Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R^n}{R^n - R^{-n}} (b_n \cos n\vartheta - a_n \sin n\vartheta)$$

hat. Schließlich bleibt noch  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\vartheta - a_n \sin n\vartheta) r^n$  für  $r \rightarrow 1$  zu beurteilen, also der Abel-Limes der zu  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$  konjugierten Fourier-Reihe. Da auch  $v(z)$  in  $R \leq |z| \leq 1$  stetig ist, existiert derselbe, und sein Wert ist

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt.$$

Fassen wir zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} v(e^{i\vartheta}) = & \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R^n}{R^n - R^{-n}} (b_n \cos n\vartheta - a_n \sin n\vartheta) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{R^n - R^{-n}} (b'_n \cos n\vartheta - a'_n \sin n\vartheta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt, \end{aligned}$$

also gerade (3.4). Der Beweis von (3.3) verläuft entsprechend.

#### § 4. Konforme Abbildung nahezu kreisringförmiger Gebiete

Nunmehr sind wir in der Lage, unseren angekündigten Satz zu beweisen.

**Satz 4.1.** *Das Gebiet  $G$  der  $w$ -Ebene sei von zwei bezüglich  $w=0$  sternigen Jordan-Kurven  $C_1$  und  $C_2$  berandet; ihre Polarkoordinatendarstellungen seien  $\varrho_1(\varphi)$  und  $\varrho_2(\varphi)$ .*

a) *Die Funktionen  $\varrho_j(\varphi)$  seien in  $\langle 0, 2\pi \rangle$  absolut stetig.*

b) *Für ein  $\varepsilon > 0$  gelte*

$$(b_1) \quad \frac{1}{1+\varepsilon} < \varrho_1(\varphi) < 1 + \varepsilon \quad \text{und} \quad (b_2) \quad \frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{\varrho_2(\varphi)}{R} < 1 + \varepsilon \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

c) *Für die nach a) fast überall existierenden Ableitungen  $\varrho'_j(\varphi)$  gelte*

$$(c_1) \quad \left| \frac{\varrho'_1(\varphi)}{\varrho_1(\varphi)} \right| < N \cdot \varepsilon \quad \text{und} \quad (c_2) \quad \left| \frac{\varrho'_2(\varphi)}{\varrho_2(\varphi)} \right| < N \cdot \varepsilon,$$

das heißt es ist

$$|\operatorname{tg} \kappa_1(\varphi)| < N \cdot \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad |\operatorname{tg} \kappa_2(\varphi)| < N \cdot \varepsilon,$$

wenn  $\kappa_j(\varphi)$  den fast überall existierenden Winkel zwischen  $|w| = \varrho_j(\varphi)$  und  $C_j$  im Punkte  $(\varphi; \varrho_j(\varphi))$  bezeichnet.

Bildet dann  $w = F(z)$  den Ring  $R < |z| < 1$  konform auf  $G$  ab, wobei  $F(R) > 0$  ist, so gibt es eine nur von  $R$  und  $N$  abhängige Konstante  $K$ , so daß gilt

$$(4.1) \quad |F(z) - z| \leq K \cdot \varepsilon \quad (R \leq |z| \leq 1).$$

Der Beweis wird zeigen, daß man im Falle  $\varepsilon \leq 1$  hierbei

$$(4.2) \quad K = [1 + 2N(2 \log 2 + 1)] + \frac{8R}{(1-R)^2} + 2N \cdot \frac{1+R}{1-R} (1 + 2\pi)$$

wählen darf; ist speziell  $\varrho_2(\varphi) \equiv R$  für alle  $\varphi$ , so genügt

$$(4.2') \quad K = [1 + N(2 \log 2 + 1)] + \frac{8R(1+R)}{(1-R)^3} (1+N),$$

so daß diese Konstante für  $R \rightarrow 0$  in die von SPECHT für den Fall einfachen Zusammenhangs angegebene Zahl  $1 + N(2 \log 2 + 1)$  übergeht.

Zum Beweis unseres Satzes betrachten wir die Funktion

$$f(z) = \log \frac{F(z)}{z} = u(z) + i v(z) \quad (R \leq |z| \leq 1);$$

durch die Forderung  $v(R) = \arg \left( \frac{F(R)}{R} \right) = 0$  ist die Funktion eindeutig festgelegt. Dabei ist wegen b)

$$|u(z)| = \left| \log \left| \frac{F(z)}{z} \right| \right| \leq \log(1 + \varepsilon) < \varepsilon \quad \text{auf} \quad |z| = 1 \quad \text{und} \quad |z| = R,$$

und unser nächstes Ziel ist es, auch  $v(z)$  auf  $|z|=1$  und  $|z|=R$  abzuschätzen.

a) *Abschätzung von  $|v(Re^{i\vartheta})|$ .* Verwenden wir (3.3) und schätzen zuerst die Reihe ab, so ergibt sich

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \right| \leq 4\varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+R^n}{R^{-n}-R^n} = 4\varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{1-R^n} \leq 4\varepsilon \cdot \frac{R}{(1-R)^2}.$$

Der letzte Term in (3.3) gibt Anlaß zu

$$(4.3) \quad \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \varrho_2(\varphi(t)) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt \right| \leq N\varepsilon \left[ 2 \log 2 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi(t) - t) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt \right];$$

dabei wurde Satz 2.1 verwendet, dessen Voraussetzungen hier alle erfüllt sind. Zur Abschätzung der rechten Seite von (4.3) verwenden wir nun (3.1'a) und erhalten mit (3.2')

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(Re^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt \right| \leq \varepsilon + \frac{1+R}{1-R} (\varepsilon + 2\pi);$$

dabei haben wir  $|v(e^{i\vartheta})|$  grob durch  $2\pi$  abgeschätzt. Insgesamt ergibt sich so

$$|v(Re^{i\vartheta}) - \beta_0| \leq 4\varepsilon \frac{R}{(1-R)^2} + N\varepsilon \left[ 2 \log 2 + \varepsilon + \frac{1+R}{1-R} (\varepsilon + 2\pi) \right] = \alpha \cdot \varepsilon.$$

Wegen  $v(R) = 0$  entnimmt man daraus  $|\beta_0| \leq \alpha \cdot \varepsilon$ , also (für fast alle  $\vartheta$  und wegen der Stetigkeit von  $v(Re^{i\vartheta})$  sogar für *alle*  $\vartheta$ )

$$(4.4) \quad |v(Re^{i\vartheta})| \leq 2\alpha \cdot \varepsilon.$$

b) *Abschätzung von  $|v(e^{i\vartheta})|$ .* Aus (3.4) folgt wie oben sofort

$$|v(e^{i\vartheta})| \leq \alpha \cdot \varepsilon + 4\varepsilon \cdot \frac{R}{(1-R)^2} + \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta-t}{2} dt \right|.$$

Hierin ist der letzte Term nach Satz 2.1 und (3.1a)

$$\leq N\varepsilon \left[ 2 \log 2 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi(t) - t) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - t}{2} dt \right] \leq N\varepsilon \left[ 2 \log 2 + \varepsilon + \frac{1+R}{1-R} (\varepsilon + 2\pi) \right].$$

Es ergibt sich somit (wieder für alle  $\vartheta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ )

$$|v(e^{i\vartheta})| \leq \alpha \cdot \varepsilon + \left\{ 4\varepsilon \frac{R}{(1-R)^2} + N\varepsilon \left[ 2 \log 2 + \varepsilon + \frac{1+R}{1-R} (\varepsilon + 2\pi) \right] \right\} = 2\alpha\varepsilon,$$

also ist

$$|v(z)| \leq 2\alpha\varepsilon \quad \text{für } |z| = R \quad \text{und} \quad |z| = 1.$$

Daraus folgt nun schließlich

$$|F(z) - z| \leq \left| \frac{F(z)}{z} - 1 \right| \leq \left| \left| \frac{F(z)}{z} \right| - 1 \right| + \left| \arg \frac{F(z)}{z} \right| \leq \varepsilon + 2\alpha\varepsilon,$$

$$|F(z) - z| \leq \varepsilon \left[ 1 + 2N(\varepsilon + 2 \log 2) + \frac{8R}{(1-R)^2} + 2N \frac{1+R}{1-R} (\varepsilon + 2\pi) \right],$$

gültig für  $|z| = 1$  und  $|z| = R$ , also in  $R \leq |z| \leq 1$ .

Führt man den Beweis für den Sonderfall  $\varrho_2(\varphi) \equiv R$  durch, der in [5] behandelt ist, so erhält man zunächst aus (3.3) entsprechend zu oben

$$|f(Re^{i\vartheta})| = |v(Re^{i\vartheta})| \leq \frac{8R}{(1-R)^2} \cdot \varepsilon,$$

und (3.1b) liefert weiter

$$|v(e^{i\vartheta})| \leq \frac{1+R}{1-R} \cdot \frac{8R}{(1-R)^2} \cdot \varepsilon + \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - t}{2} dt \right|,$$

wovon der letzte Term nach Satz 2.1 abgeschätzt wird und

$$\leq N\varepsilon \left[ 2 \log 2 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(e^{it}) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - t}{2} dt \right]$$

ist. Mit (3.1a) ergibt sich

$$\begin{aligned} |v(e^{i\vartheta})| &\leq \varepsilon \left[ \frac{1+R}{(1-R)^3} \cdot 8R + N \cdot 2 \log 2 + N\varepsilon + \frac{1+R}{(1-R)^3} \cdot 8RN\varepsilon \right] \\ &\leq \varepsilon \left[ N(\varepsilon + 2 \log 2) + \frac{8R(1+R)}{(1-R)^3} (1 + N\varepsilon) \right], \end{aligned}$$

also

$$|F(z) - z| \leq \varepsilon \left[ 1 + N(\varepsilon + 2 \log 2) + \frac{8R(1+R)}{(1-R)^3} (1 + N\varepsilon) \right].$$

Daraus folgt die Aussage (4.2') für die Konstante  $K$ .

### § 5. Konforme Abbildung nahezu kreisförmiger Gebiete

Zum Beweis der Sätze 9.3 und 9.4 benötigen wir noch einen Satz, der sich mit der konformen Abbildung von Ringgebieten beschäftigt, bei denen eine Randkomponente klein ist, so daß die Abbildungsfunktion dort „nahezu“ eine heb-  
bare Singularität besitzt.



Satz 5.1. Gegeben sei ein zweifach zusammenhängendes, endliches Gebiet  $G$  der  $w$ -Ebene, welches außen von  $|w|=1$  berandet wird und das  $w=0$  nicht enthält. Es bezeichne  $w=f(z)$  die durch die Bedingung  $f(1)=1$  normierte konforme Abbildung von  $r<|z|<1$  auf  $G$ . Dann gilt für eine absolute Konstante  $C$

$$|f(z) - z| \leq C \cdot r \quad (r < |z| \leq 1; 0 \leq r < 1);$$

die kleinste derartige Konstante  $C_0$  genügt  $4 \leq C_0 \leq 12,6$ .

Beweis. Wir zerlegen zunächst  $f(z)$  in eine in  $|z| < \frac{1}{r}$  reguläre Funktion  $F(z)$  und eine Korrekturfunktion  $k(z)$ . Für jedes  $z$  mit  $r < |z| < \frac{1}{r}$  gilt

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)/\zeta}{\zeta-z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|\zeta|=r_2} \frac{f(\zeta)/\zeta}{\zeta-z} d\zeta \quad \left(r < r_1 < |z| < r_2 < \frac{1}{r}\right),$$

also für  $f(z)$  die Zerlegung  $f(z) = k(z) + F(z)$ , wobei  $F(z)$  in  $|z| < \frac{1}{r}$  regulär ist und  $F(0) = 0$  ist.

Für die in  $|z| > r$  reguläre Korrektur  $k(z)$  ist nun eine möglichst gute Abschätzung wichtig. Eine erste gröbere Abschätzung ergibt sich sofort mit Satz 1.3; für jedes  $r_1$  mit  $r < r_1 < 1$  gilt nämlich

$$|k(z)| \leq \frac{4r_1}{1+4r_1^2} \cdot \frac{1}{1-r_1} \quad (|z|=1),$$

und  $r_1 \rightarrow r$  liefert

$$(5.1) \quad |k(z)| \leq \frac{4r}{1+4r^2} \cdot \frac{1}{1-r} = c_1(r) \quad (|z|=1).$$

Wir merken gleich an, daß für  $0 \leq r \leq \frac{1}{6}$  die Funktionen  $\frac{c_1(r)}{r}$  und  $c_1(r)$  monoton zunehmen, und daß  $c_1(\frac{1}{6}) < 1$  ist. Für eine etwas genauere Beurteilung von  $|k(z)|$  schreiben wir

$$(5.2) \quad k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_1} f(\zeta) \left[ \frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta} \right] d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)-C}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta,$$

wo  $C$  eine beliebige Konstante sein darf. Berücksichtigen wir, daß die Menge der Punkte  $f(\zeta)$  ( $|\zeta|=r_1$ ) einen Durchmesser  $\leq 2L(r_1) < 4r_1$  hat<sup>4</sup>, so gibt es nach einem elementargeometrischen Satz von JUNG<sup>5</sup> einen Kreis vom Radius  $4r_1/\sqrt{3}$ , in welchem diese Punktmenge liegt. Nehmen wir  $C$  als dessen Mittelpunkt, so ergibt sich aus (5.2)

$$|k(z)| \leq \frac{4r_1^2}{\sqrt{3}(|z|-r_1)} + \frac{4r_1}{1+4r_1^2} \quad (r < r_1 < |z|),$$

und  $r_1 \rightarrow r$  liefert

$$(5.3) \quad |k(z)| \leq \frac{4r^2}{\sqrt{3}(|z|-r)} + \frac{4r}{1+4r^2} \quad (|z| > r).$$

<sup>4</sup> Dies geht aus den Ergebnissen von GRÖTZSCH in [12] hervor;  $L(r)$  ist die im Beweis von Satz 1.3 auftretende Größe.

<sup>5</sup> Vgl. z.B. [13], S. 140.

Es sei nun weiter  $r$  auf  $0 \leq r \leq \frac{1}{6}$  beschränkt, so daß  $|k(z)| < 1$  wird für  $|z| \geq 1$ . Da aber  $|f(z)| > 1$  ist ( $|z| \geq 1$ ), haben wir  $\Delta \arg f(z)|_{|z|=1/r} = 2\pi = \Delta \arg F(z)|_{|z|=1/r}$ , und  $F(z)$  hat daher  $z=0$  als einzige Nullstelle in  $|z| < \frac{1}{r}$ . Also ist

$$H(\hat{z}) = \log \frac{F(z)}{z} = u(z) + i v(z) \quad \text{in} \quad |z| < \frac{1}{r}$$

regulär erklärbar. Wir merken gleich an:

$$(5.4) \quad u(0) = \log |F'(0)| \leq 0, \quad \text{da} \quad |F'(0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \right| \leq 1$$

ist. Außerdem ist auf  $|z|=1$  unter Benützung von (5.1)

$$(5.5) \quad |u(z)| = |\log |F(z)|| \leq |\log (1 - c_1(r))| = c_2(r) \quad (|z|=1)$$

und also für jedes  $\varrho$  mit  $r < \varrho < 1$

$$(5.6) \quad |H(z) - H(0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{i\varphi+z}}{e^{i\varphi-z}} - 1 \right) u(e^{i\varphi}) d\varphi \right| \leq \frac{2\varrho}{1-\varrho} \cdot c_2(r) \quad (|z|=\varrho).$$

Diese Abschätzung schreiben wir jetzt um in eine für  $H(z^*)$ , wobei  $*$  jeweils die bezüglich des Einheitskreises vorgenommene Spiegelung bedeuten soll. Es ist (also für  $|z|=\varrho, r < \varrho < 1$ )

$$H(z^*) = \log \frac{F(z^*)}{z^*} = \log \left\{ \frac{f(z^*)}{z^*} \left[ 1 - \frac{k(z^*)}{f(z^*)} \right] \right\} = \log \frac{f(z^*)}{z^*} + \log \left[ 1 - \frac{k(z^*)}{f(z^*)} \right],$$

wobei der erste Term

$$\log \frac{\bar{z}}{\bar{f}(z)} = \log \left[ \frac{z}{f(z)} \right]^- = -\overline{\log \frac{f(z)}{z}} = -\overline{H(z)},$$

der zweite Term hingegen betragslich

$$\leq \left| \log \left[ 1 - \frac{4\varrho}{1+4\varrho^2} \left( \frac{4r^2}{\sqrt{3}\left(\frac{1}{\varrho} - r\right)} + \frac{4r}{1+4r^2} \right) \right] \right| = h(\varrho)$$

ist; dabei haben wir  $\left| \frac{1}{\bar{f}(z^*)} \right| = |f(z)| \leq \frac{4\varrho}{1+4\varrho^2}$  und (5.3) verwendet. Setzen wir  $\alpha = -\overline{H(0)}$ , so folgt aus (5.6)

$$|H(z^*) - \alpha| \leq |H(z) - H(0)| + h(\varrho) \leq \frac{2\varrho}{1-\varrho} c_2(r) + h(\varrho) \quad (|z|=\varrho)$$

oder

$$|H(z) - \alpha| \leq \frac{2\varrho}{1-\varrho} c_2(r) + h(\varrho) \quad \left( |z| \leq \frac{1}{\varrho} \right).$$

Läßt man hier bei festem  $z$   $\varrho \rightarrow r$  rücken, so erhält man

$$|H(z) - \alpha| \leq \frac{2r}{1-r} c_2(r) + h(r) = c_3(r) \quad \left( |z| < \frac{1}{r} \right),$$

und dabei ist

$$h(r) = \left| \log \left[ 1 - \frac{4r}{1+4r^2} \left( \frac{4r^3}{\sqrt{3}(1-r^2)} + \frac{4r}{1+4r^2} \right) \right] \right|$$

für unsere betrachteten  $r$ -Werte monoton zunehmend. Auch  $c_3(r)$  wächst daher monoton mit  $r$  ( $0 \leq r \leq \frac{1}{6}$ ).

Wir erhalten nun weiter

$$|H(z) - H(0)| \leq |H(z) - \alpha| + |H(0) - \alpha| \leq 2c_3(r) \quad \left( |z| < \frac{1}{r} \right),$$

also nach dem Schwarzschen Lemma sogar

$$|H(z) - H(0)| \leq 2c_3(r) r \cdot |z| \quad \left( |z| < \frac{1}{r} \right).$$

Diese Ungleichung verwenden wir für  $|z| = 1$

$$(5.7) \quad |H(z) - H(0)| \leq 2r c_3(r) \quad (|z| = 1).$$

Es ist nämlich unter Berücksichtigung von (5.4)

$$|e^{H(z)} - e^{H(0)}| = |e^{H(z)-H(0)} - 1| \cdot |e^{H(0)}| \leq (e^{2rc_3(r)} - 1) e^{u(0)} \leq e^{2rc_3(r)} - 1,$$

$$\left| \frac{F(z)}{z} - F'(0) \right| \leq e^{2rc_3(r)} - 1,$$

also

$$\left| \frac{f(z)}{z} - F'(0) \right| \leq e^{2rc_3(r)} - 1 + c_1(r) = c_4(r) \quad (|z| = 1).$$

Die Normierungsvorschrift  $f(1) = 1$  bringt

$$|1 - F'(0)| \leq c_4(r)$$

ein, und somit erhält man schließlich

$$|f(z) - z| = \left| \frac{f(z)}{z} - 1 \right| \leq 2c_4(r) \quad (|z| = 1),$$

das heißt

$$(5.8) \quad |f(z) - z| \leq 2 \left[ \frac{e^{2rc_3(r)} - 1}{r} + \frac{c_1(r)}{r} \right] \cdot r \quad (|z| = 1).$$

Hierin ist der Koeffizient von  $r$  für unsere  $r$ -Werte  $> \frac{2c_1(r)}{r} > 7$ , und da trivialerweise  $\sup_{|z| \rightarrow r+} |f(z) - z| \leq 5r$  ist, ist (5.8) sogar für alle  $z$  mit  $r < |z| \leq 1$  gültig. Der Koeffizient von  $r$  in (5.8) ist außerdem in  $0 \leq r \leq \frac{1}{6}$  monoton zunehmend, und für  $r = \frac{1}{6,3}$  erhält man durch Rechnung

$$(5.9) \quad |f(z) - z| \leq 12,6 \cdot r \quad (r < |z| \leq 1),$$

so daß dies für alle  $r$  in  $0 \leq r \leq \frac{1}{6,3}$  gilt. Für die  $r$  mit  $\frac{1}{6,3} < r < 1$  hat man aber stets

$$|f(z) - z| \leq 2 = \frac{2}{r} \cdot r < 12,6 \cdot r \quad (r < |z| \leq 1),$$

also gilt die Behauptung von Satz 5.1 mit der Konstanten  $C = 12,6$  für alle  $r$  in  $0 \leq r < 1$ .

Um schließlich zu sehen, daß  $C_0 \geq 4$  sein muß, betrachten wir die Abbildung von  $r < |z| < 1$  durch die lineare Funktion

$$f(z) = \frac{1+ir}{1-ir} \cdot \frac{z-ir}{1+irz}.$$

Das Bildgebiet erfüllt die Voraussetzungen von Satz 5.1 und es ist  $f(1) = 1$ . Bemerken wir noch

$$|f(-1) - (-1)| = 4r + O(r^2) \quad (r \rightarrow 0),$$

so sieht man, daß in unserem Satz keine Konstante  $C < 4$  genommen werden kann. Damit ist Satz 5.1 vollständig bewiesen. —

Abschließend möchten wir noch bemerken, daß man in Analogie zum Vorgehen bei BIEBERBACH [2], also mit Hilfe von Flächensätzen, auch zu einer Abschätzung von  $|f(z) - z|$  kommen kann. Allerdings ergibt sich dann nur  $|f(z) - z| = O(\sqrt{r})$ .

### III. Funktionentheoretische Iterationsverfahren zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete

Wir kommen nun zum Hauptthema der Arbeit, der Gewinnung von Fehlerabschätzungen für Iterationsverfahren zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete. In §7, §8 und §9, **A** ist  $G$  ein  $n$ -fach zusammenhängendes Gebiet der  $z$ -Ebene mit  $\infty \in G$ , welches konform und in  $\infty$  normiert auf ein Vollkreisgebiet  $V$  abgebildet werden soll. Eine Abbildung durch  $f(z)$  heißt dabei in  $\infty$  normiert, wenn in der Umgebung von  $\infty$  gilt  $f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$ . Hintereinanderschalten normierter Abbildungen gibt wieder eine solche.

Den Koebeschen Iterationsverfahren liegt folgende Überlegung zugrunde. Das Vollkreisgebiet  $V$  läßt sich über seine Ränder hinaus beliebig oft spiegeln; umgekehrt ist jedes Gebiet, das diese Eigenschaft besitzt (im Sinne von §6), ein Vollkreisgebiet. Daher werden solche Funktionen  $f_m(z)$ , für die  $f_m(G)$  an dessen Rändern oft gespiegelt werden kann, eine gute Approximation für die exakte Abbildung von  $G$  auf  $V$  darstellen. Zu den  $f_m(z)$  kommt KOEBE über das „iterierende Verfahren“ (§7) und das „Iterationsverfahren“ (§8).

Fehlerabschätzungen waren bisher für diese Verfahren nicht bekannt. Auf Anregung des Verf. hat neuerdings HÜBNER [14] in dieser Richtung Fortschritte erzielt und Aussagen entsprechend den Sätzen 9.1 und 9.2, aber mit schwächerer Konvergenz, gewonnen; die Beweisführung bei HÜBNER ist allerdings auf den Fall  $n = 2$  beschränkt.

In §9, **B** und **C** behandeln wir zwei Iterationsverfahren für endliche Ringgebiete, wovon das eine (KOMATU) schon in [5] auf Konvergenz untersucht war. Wegen der überaus raschen Konvergenz sei auf das Verfahren in §9, **C** besonders hingewiesen.

#### §6. Spiegelung von Gebieten

Gegeben seien zwei beliebige fremde Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  der  $z$ -Ebene, die eine gemeinsame Randkomponente  $C$  haben sollen. Ist  $C$  ein Kreis, so ist klar, was darunter zu verstehen ist, wenn wir sagen,  $G_1$  und  $G_2$  seien bezüglich  $C$  spiegelbildlich. Wir erklären die spiegelbildliche Lage von  $G_1$  und  $G_2$  bezüglich  $C$  allgemein wie folgt.



Definition 1. Die Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  mit der gemeinsamen Randkomponente  $C$  heißen dann *spiegelbildlich bezüglich  $C$* , wenn es eine konforme Abbildung  $w = f(z)$  von  $G_1 \cup C \cup G_2$  gibt, so daß

- ( $\alpha$ )  $f(C)$  ein Kreis  $K$  der  $w$ -Ebene ist, und
- ( $\beta$ )  $f(G_1)$  und  $f(G_2)$  bezüglich  $K$  spiegelbildlich liegen.

Die bezüglich  $K$  spiegelbildliche Lage der Bilder wird also durch  $f^{-1}$  auf die spiegelbildliche Lage der Urbilder übertragen.

Manchmal ist es notwendig zu wissen, ob  $G_1$  überhaupt ein Spiegelbild hat, d.h. ob  $G_1$  an  $C$  *spiegelungsfähig* ist. Aus unserer Definition geht unmittelbar hervor, daß dies genau dann der Fall ist, wenn es eine konforme Abbildung  $w = f(z)$  von  $G_1$  auf ein Gebiet  $G'_1$  gibt derart, daß

- ( $\alpha$ )  $f(C)$  ein Kreis  $K$  ist, und
- ( $\beta$ ) die Umkehrfunktion  $f^{-1}(w)$  in das bezüglich  $K$  genommene Spiegelbild  $G'_2$  von  $G'_1$  hinein analytisch und schlicht fortsetzbar ist. Dann ist  $f^{-1}(G'_2) = G_2$  das bezüglich  $C$  genommene Spiegelbild von  $G_1$ .

Wir bemerken sogleich mehrere *einfache Folgerungen* aus der Definition.

(a) Damit  $G_1$  an  $C$  spiegelungsfähig ist, ist notwendig, daß  $C$  eine analytische Jordan-Kurve ist.

(b) Die durch  $f^{-1}Sf$  angegebene „natürliche“ Zuordnung spiegelbildlicher Punkte ist indirekt konform. Dabei bezeichnete  $S$  die Spiegelung am Kreis  $K$ , die ja indirekt konform ist.

(c) Insbesondere ist  $G_2$  indirekt konformes Bild von  $G_1$ . Ist daher speziell  $G_1$  ein zweifach zusammenhängendes Gebiet vom Modul  $M(>1)$ , so ist auch  $G_2$  zweifach zusammenhängend und vom selben Modul.

(d) Liegen  $G_1$  und  $G_2$  bezüglich  $C$  spiegelbildlich, und wird das Gesamtgebiet  $G_1 \cup C \cup G_2$  einer konformen Abbildung  $h$  unterworfen, so liegen  $h(G_1)$  und  $h(G_2)$  bezüglich  $h(C)$  spiegelbildlich. Denn  $f/h^{-1}$  bildet  $h(G_1)$  und  $h(G_2)$  auf Gebiete ab, die bezüglich  $K$  spiegelbildlich liegen.

(e) Bezüglich einer Randkomponente  $C$  von  $G_1$  existiert höchstens ein Spiegelbild. Bezeichnen wir nämlich (für den Fall zweier Spiegelbilder) mit  $F_1(z)$  und  $F_2(z)$  ( $z \in G_1$ ) die in (b) genannten Zuordnungen spiegelbildlicher Punkte, so ist  $F_1(z) = F_2(z)$  für  $z \in G_1$  aus einer hinreichend kleinen Umgebung von  $C$ , da wir ja eine Spiegelung an einer analytischen Kurve vor uns haben, welche eindeutig erklärt ist ([I], S. 360). Also ist die in  $G_1$  analytische Funktion  $[F_1(z) - F_2(z)] \cdot 0$  für alle hinreichend nahe an  $C$  liegenden  $z \in G_1$ . Daher ist  $F_1(z) = F_2(z)$  ( $z \in G_1$ ), und folglich sind die Spiegelbilder bezüglich  $C$  eindeutig festgelegt.

(f) Wir betrachten ein an  $C$  spiegelungsfähiges Gebiet  $G_1$ ; sein Spiegelbild sei  $G_2$ . Wird nun  $G_1$  allein einer konformen Abbildung  $w = h(z)$  unterworfen, so ist  $h(z)$  genau dann über  $C$  hinaus nach  $G_2$  schlicht fortsetzbar, wenn  $h(G_1)$  an  $h(C)$  spiegelungsfähig ist.

(i) Ist  $h(z)$  nach  $G_2$  schlicht fortsetzbar, so wende man (d) an.

(ii) Sei  $h(G_1)$  an  $h(C)$  spiegelungsfähig, und  $*$  bezeichne die Spiegelung an  $C$  bzw. an  $h(C)$ . Dann betrachten wir für  $z \in G_2$  die Funktion

$$g(z) = [h(z^*)]^*,$$

die in  $G_2$  analytisch ist. Bei Annäherung an  $C$  ist  $g(z)$  stetig ( $C$  und  $h(C)$  sind analytische Jordan-Kurven), und es ist  $g(z) = h(z)$  ( $z \in C$ ). Nach dem Stetigkeitsprinzip setzt  $g(z)$  die gegebene Funktion  $h(z)$  nach  $G_2$  hinein fort, und es ist  $h(G_2)$  gleich dem Spiegelbild von  $h(G_1)$  bezüglich  $h(C)$ .

Später benötigen wir vor allem folgende Teilaussage von (f):

(g) Die Funktion  $w = h(z)$  bilde  $G_1$  konform auf  $G'_1$  ab.  $G_1$  sei an  $C$  und  $G'_1$  an  $h(C)$  spiegelungsfähig. Dann läßt sich  $h(z)$  in das Spiegelbild  $G_2$  von  $G_1$  bezüglich  $C$  hinein analytisch fortsetzen, und es ist  $h(G_2)$  das Spiegelbild von  $h(G_1)$  bezüglich  $h(C)$ .

Bei unseren Untersuchungen in § 7 bis § 9 wird der Fall von Bedeutung sein, daß ein Gebiet  $G$  mehrfach spiegelungsfähig ist.

**Definition 2.** Das  $n$ -fach zusammenhängende Gebiet  $G$  heißt einmal allseitig spiegelungsfähig, wenn es bezüglich jeder seiner  $n$  Randkomponenten spiegelungsfähig ist. Ist dies der Fall, und ist außerdem jedes der  $n$  gewonnenen Spiegelbilder von  $G$  selbst wieder einmal allseitig spiegelungsfähig, so nennen wir  $G$  zweimal allseitig spiegelungsfähig.

Höhere Spiegelungsfähigkeit wird entsprechend erklärt. Durch mehrfache Anwendung von (g) erhält man allgemeiner

(g') Die Funktion  $w = h(z)$  bilde  $G_1$  konform auf  $G'_1$  ab.  $G_1$  und  $G'_1$  seien jeweils  $k$ -mal allseitig spiegelungsfähig; die durch ihre Spiegelbilder erweiterten Gebiete heißen  $G_2$  und  $G'_2$ . Dann läßt sich  $h(z)$  nach  $G_2$  hinein analytisch fortsetzen und es ist  $h(G_2) = G'_2$ .

### § 7. Das „iterierende Verfahren“ von KOEBE

**A. Angabe des Verfahrens.** Vorgegeben sei ein beliebiges  $n$ -fach zusammenhängendes Gebiet  $G = G_0$  der  $z_0$ -Ebene mit  $\infty \in G_0$  und den Randkomponenten  $C_i^{(0)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), welches auf ein Vollkreisgebiet abzubilden sei. Bei dem ersten hier zu behandelnden Verfahren geht man dazu folgendermaßen vor.

Beim ersten Schritt werde das gesamte Äußere von  $C_1^{(0)}$  (also ein einfach zusammenhängendes Gebiet) durch  $z_1 = h_1(z_0)$  konform und normiert (um  $z_0 = \infty$  gilt  $h_1(z_0) = z_0 + \frac{a_1}{z_0} + \frac{a_2}{z_0^2} + \dots$ ) auf das Äußere eines Kreises  $C_1^{(1)}$  abgebildet; die Bilder bezeichnen wir mit  $h_1(G_0) = G_1$  und  $h_1(C_i^{(0)}) = C_i^{(1)}$ . Das Gebiet  $G_1$  ist bei nicht-spezzieller Wahl der  $C_i^{(0)}$  (was auch im folgenden angenommen wird) genau einmal spiegelungsfähig, nämlich am Kreis  $C_1^{(1)}$ .

Beim zweiten Schritt werde das gesamte Äußere von  $C_2^{(1)}$  durch  $z_2 = h_2(z_1)$  konform und normiert auf das Äußere eines Kreises  $C_2^{(2)}$  abgebildet; wir setzen  $h_2(G_1) = G_2$  und  $h_2(C_i^{(1)}) = C_i^{(2)}$ . Die Kurve  $C_1^{(1)}$  verliert bei diesem Schritt zwar ihre Kreisgestalt, jedoch bleibt (§ 6, (d))  $G_2$  auch über  $C_1^{(2)}$  hinaus spiegelungsfähig. Neu hinzu kommt die Spiegelungsfähigkeit von  $G_2$  über  $C_2^{(2)}$ . Und so fort.

Beim  $(n+1)$ -ten Schritt betrachten wir wieder die „erste“ Kurve  $C_1^{(n)}$  und bilden ihr gesamtes Äußeres durch  $z_{n+1} = h_{n+1}(z_n)$  konform und normiert auf das Äußere eines Kreises  $C_1^{(n+1)}$  ab; wir setzen  $h_{n+1}(G_n) = G_{n+1}$  und  $h_{n+1}(C_i^{(n)}) = C_i^{(n+1)}$ .

Wie das Verfahren fortführt, ist klar; die entstehenden Bilder der  $n$  Ausgangskurven werden periodisch durchlaufen und stets das gesamte Äußere eines solchen Bildes konform und normiert auf das Äußere eines Kreises abgebildet. Nach

allgemein  $m$  Schritten sind  $m$  konforme Abbildungen  $h_1(z_0)$ ,  $h_2(z_1)$ ,  $h_3(z_2)$ , ...,  $h_m(z_{m-1})$  durchgeführt, und durch Hintereinanderschalten derselben erhalten wir die  $m$ -te Iteration:

$$f_m(z_0) = h_m \dots h_2 h_1(z_0) \quad (z_0 \in G_0; m = 1, 2, \dots).$$

Diese Funktion bildet  $G_0$  konform und normiert auf  $G_m$  ab, und wir werden in Teil B sehen, daß  $f_m(z_0)$  unsere gesuchte Abbildungsfunktion von  $G_0$  auf das Vollkreisgebiet mit wachsendem  $m$  immer besser approximiert.

Zuvor wollen wir jedoch untersuchen, wie oft  $G_m$  allseitig spiegelungsfähig ist. Dazu betrachten wir die  $i$ -te Kurve, die  $G_{m-1}$  berandet, also  $C_i^{(m-1)}$  ( $1 \leq i \leq n$ ).  $G_{m-1}$  sei über sie, d.h. wenn man nur Spiegelbilder von  $G_{m-1}$  innerhalb  $C_i^{(m-1)}$  betrachtet,  $S_i^{(m-1)}$ -mal allseitig spiegelungsfähig. Bei unserem  $m$ -ten Schritt werde nun  $C_{i_0}^{(m-1)}$  auf einen Kreis abgebildet. Diese Abbildung läßt die Spiegelungen von  $G_{m-1}$  an  $C_i^{(m-1)}$  ( $i \neq i_0$ ) bestehen (§ 6, (d)), d.h.  $G_m$  ist  $S_i^{(m)} = S_i^{(m-1)}$ -mal über  $C_i^{(m)}$  hinein allseitig spiegelungsfähig ( $i \neq i_0$ ). Über den Kreis  $C_{i_0}^{(m)}$  ist  $G_m$  dagegen ersichtlich  $S_{i_0}^{(m)} = 1 + \min_{i \neq i_0} S_i^{(m-1)}$ -mal allseitig spiegelungsfähig. Bezeichnet also insgesamt  $S_i^{(m)}$  die allseitige Spiegelungsfähigkeit von  $G_m$  über  $C_i^{(m)}$ , und wird beim  $m$ -ten Schritt  $C_{i_0}^{(m-1)}$  in einen Kreis übergeführt, so besteht die Rekursion

$$(7.1) \quad \begin{aligned} S_i^{(m)} &= S_i^{(m-1)} & (1 \leq i \leq n; i \neq i_0) \\ S_{i_0}^{(m)} &= 1 + \min_{i \neq i_0} S_i^{(m-1)}. \end{aligned} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Unser Gebiet  $G_m$  ist dann genau  $(\min_i S_i^{(m)})$ -mal allseitig spiegelungsfähig. Aus (7.1) findet man nun leicht, daß  $G_m$  für  $m = n$  erstmals einmal allseitig spiegelungsfähig ist. Für  $m = 2n - 1$  erhält man erstmals zweimalige allseitige Spiegelungsfähigkeit, und allgemein ist  $G_m$  für  $m = k \cdot n - (k - 1)$  erstmals  $k$ -mal allseitig spiegelungsfähig. Anders ausgedrückt:

Satz 7.1. Das nach  $m$  Iterationsschritten aus  $G_0$  hervorgegangene Gebiet  $G_m$  ist  $N(m) = \left\lfloor \frac{m-1}{n-1} \right\rfloor$ -mal allseitig spiegelungsfähig.

**B. Konvergenz des Verfahrens.** Nachdem wir nunmehr untersucht haben, wie die allseitige Spiegelungsfähigkeit von  $G_m$  mit  $m$  zunimmt, sind wir in der Lage, daraus Schlüsse zu ziehen auf die Annäherung unserer gesuchten Normalabbildung durch  $f_m(z_0)$ .

Hierzu beweisen wir folgenden allgemeinen Satz<sup>6</sup>.

Satz 7.2. Das Vollkreisgebiet  $V$  der  $w$ -Ebene sei durch  $z = g(w)$  konform und normiert auf das  $n$ -fach zusammenhängende Gebiet  $G$  ( $\infty \in G$ ) der  $z$ -Ebene abgebildet. Die Ränder  $C_i$  bzw.  $\bar{C}_i$  von  $V$  bzw.  $G$  liegen in  $|w| \leq R$  bzw.  $|z| \leq R$ , und  $G$  sei  $N$ -mal allseitig spiegelungsfähig. Weiter sei  $D = \text{dist}(V; \bigcup_i C_i^{(1)})$  gesetzt, wenn  $C_i^{(1)}$  die durch einmalige Spiegelung von  $V$  an seinen Randkreisen entstehenden neuen Kreise sind. Die Kreise  $C_i$  seien ferner durch  $n$  Jordan-Kurven  $\Gamma_i$  umschlossen, so daß  $C_i$  und  $\Gamma_i$   $n$  fremde Ringgebiete von den Moduln  $M_i (> 1)$  beranden, und schließlich sei  $M = \min_{1 \leq i \leq n} M_i$ .

<sup>6</sup> Die in Satz 7.2 und dessen Beweis verwendeten Bezeichnungen decken sich nicht mit denen, die in der Hauptentwicklung von § 7 vorkommen.

Dann gilt mit der Konstanten  $K(M)$  aus Satz 1.2

$$(7.2) \quad |g(w) - w| \leq \frac{\{4\pi + K(M) \cdot M^2\} R^2}{4 \sqrt[3]{3} D} \cdot \frac{1}{M^{4N}} \quad (w \in V).$$

Der Satz präzisiert, wie sich hohe Spiegelungsfähigkeit von  $G$  niederschlägt in einer guten Approximation der Identität  $w$  durch die Abbildungsfunktion  $g(w)$ . Man sieht außerdem, daß die Auswirkung hoher Spiegelungsfähigkeit von  $G$  auf gute Approximation von  $w$  durch  $g(w)$  um so größer ist, je größer  $M$  ist, das heißt (in einem relativen Sinne) je weiter die Kurven  $C_i$  voneinander weg liegen.

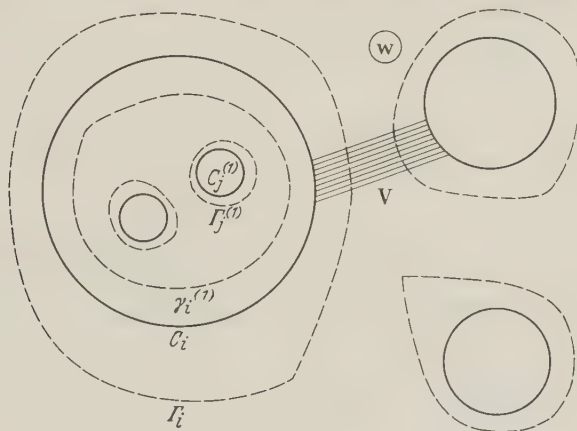


Fig. 2

Beweis. Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein. Nach Voraussetzung, bzw. weil  $V$  Vollkreisgebiet ist, sind  $G$  und  $V$   $N$ -mal allseitig spiegelungsfähig. Die durch ihre Spiegelbilder erweiterten Gebiete nennen wir  $G^*$  und  $V^*$ , und § 6 ( $g'$ ) ist zu entnehmen, daß  $g(w)$  in  $V^*$  hinein schlicht fortsetzbar ist und als Bild  $g(V^*) = G^*$  liefert. Die nach einmaliger allseitiger Spiegelung von  $V$  bzw.  $G$  an den Kurven  $C_i = C_i^{(0)}$  bzw.  $\bar{C}_i = \bar{C}_i^{(0)}$  entstehenden  $n(n-1)$  neuen Kurven nennen wir  $C_i^{(1)}$  bzw.  $\bar{C}_i^{(1)}$ . Eine weitere allseitige Spiegelung an jenen Kurven ergibt die Ränder  $C_i^{(2)}$  und  $\bar{C}_i^{(2)}$ . Schließlich wird  $G^*$  von den Kurven  $\bar{C}_i^{(N)}$  und  $V^*$  von den Kreisen  $C_i^{(N)}$  berandet.

Weiter setzen wir  $g(F_i) = \bar{F}_i$  und verfolgen nun die  $F_i$  und  $\bar{F}_i$  beim Spiegelungsprozeß. Spiegelung von  $F_i = F_i^{(0)}$  an  $C_i = C_i^{(0)}$  liefert  $\gamma_i^{(1)}$ ; alle weiteren ersten Spiegelbilder der  $F_i$  (wenn also  $F_i$  an  $C_j$  gespiegelt wird ( $i \neq j$ )) nennen wir  $F_i^{(1)}$ . Die  $n(n-1)$  Kurven  $F_i^{(1)}$  umschließen je ein  $C_i^{(1)}$  und beranden mit ihm ein Ringgebiet vom Modul  $\geq M$ , wogegen ein  $\gamma_i^{(1)}$  stets  $n-1$  Kurven  $F_j^{(1)}$  umschließt und mit  $C_i^{(0)}$  ein Ringgebiet vom Modul  $\geq M$  berandet. Der weitere Spiegelungsprozeß führt entsprechend zu den  $F_i^{(v)}$  und  $\gamma_i^{(v)}$  ( $v=1, 2, \dots, N$ ), und in der  $z$ -Ebene erhalten wir ganz analog  $\bar{F}_i^{(v)} = g(F_i^{(v)})$  und  $\bar{\gamma}_i^{(v)} = g(\gamma_i^{(v)})$  ( $v=1, 2, \dots, N$ ).

Nun gilt nach der Cauchyschen Integralformel für jedes  $w \in V$

$$g(w) - w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bigcup C_i^{(N)}} \frac{g(\omega) - \omega}{\omega - w} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=R} \frac{g(\omega) - \omega}{\omega - w} d\omega,$$



wobei  $\varrho$  hinreichend groß ist. Wegen der Normierung von  $g(w)$  in  $w = \infty$  verschwindet das zweite Integral, und da  $w$  außerhalb der Integrationskreise  $C_i^{(N)}$  liegt, können wir weiter schreiben

$$g(w) - w = \frac{1}{2\pi i} \sum_i \int_{C_i^{(N)}} \frac{g(\omega) - A_i}{\omega - w} d\omega$$

mit beliebigen Konstanten  $A_i$ , die wir jetzt geeignet wählen. Wenn wir nämlich mit  $d_i^{(N)}$  den Durchmesser von  $\overline{C_i^{(N)}}$  bezeichnen, so gibt es nach dem schon in § 5 verwendeten Satz von JUNG ([13], S. 140) einen Kreis mit Radius  $\frac{d_i^{(N)}}{\sqrt{3}}$ , der  $\overline{C_i^{(N)}}$  enthält;  $A_i$  sei sein Mittelpunkt. Wir setzen noch  $l_i^{(N)}$  = Länge von  $C_i^{(N)}$  und erhalten damit für  $w \in V$

$$(7.3) \quad |g(w) - w| \leq \frac{1}{2\pi \sqrt{3} \cdot D} \cdot \sum_i (d_i^{(N)}) \cdot (l_i^{(N)}) \leq \frac{1}{4\pi \sqrt{3} \cdot D} \left[ \sum_i (d_i^{(N)})^2 + \sum_i (l_i^{(N)})^2 \right],$$

weil ja  $|w - \omega| \geq D$  gilt ( $w \in V$ ,  $\omega \in C_i^{(N)}$ ).

$\alpha)$  Beurteilung von  $\sum_i (l_i^{(N)})^2$ . Bezeichnen wir im folgenden mit  $F(C)$  stets die von  $C$  umschlossene Fläche, so können wir unter Verwendung des Satzes von CARLEMAN (Satz 1.4) sagen:

$$\begin{aligned} \sum_i (l_i^{(N)})^2 &= 4\pi \cdot \sum_i F(C_i^{(N)}) \leq 4\pi \cdot \frac{1}{M^2} \cdot \sum_i F(I_i^{(N)}) \\ &\leq 4\pi \cdot \frac{1}{M^2} \cdot \sum_i F(\gamma_i^{(N)}) \leq 4\pi \cdot \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1}{M^4} \cdot \sum_i F(I_i^{(N-1)}) \\ &\leq \dots \leq 4\pi \cdot \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1}{M^{4(N-1)}} \cdot \sum_i F(I_i^{(1)}) \\ &\leq 4\pi \cdot \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1}{M^{4(N-1)}} \cdot \sum_i F(\gamma_i^{(1)}) \leq \frac{4\pi}{M^{4N}} \cdot \sum_i F(C_i^{(0)}) \leq \frac{4\pi}{M^{4N}} \cdot \pi R^2; \end{aligned}$$

man beachte, daß  $\gamma_i^{(v)}$  und  $I_i^{(v-1)}$  ( $v = N, N-1, \dots, 2$ ) stets ein Ringgebiet vom Modul  $\geq M^2$  beranden.

$\beta)$  Beurteilung von  $\sum_i (d_i^{(N)})^2$ . Hier müssen wir außer dem Satz von CARLEMAN noch den Satz 1.2 heranziehen; sonst ist die Abschätzung ganz analog zu  $\alpha)$ . Wir erhalten

$$\sum_i (d_i^{(N)})^2 \leq K(M) \sum_i F(\overline{I_i^{(N)}}) \leq \dots \leq K(M) \cdot M^2 \cdot \frac{\pi R^2}{M^{4N}}.$$

Insgesamt ergibt sich mit  $\alpha)$  und  $\beta)$  aus (7.3)

$$|g(w) - w| \leq \frac{\{4\pi + K(M) M^2\} R^2}{4\sqrt{3}D} \cdot \frac{1}{M^{4N}} \quad (w \in V),$$

womit Satz 7.2 bewiesen ist<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> Auf demselben Weg kann man auch zum Beispiel  $|g'(w) - 1|$  abschätzen.

Nunmehr sind alle Vorbereitungen getroffen, um die Konvergenzgeschwindigkeit des Koebeschen iterierenden Verfahrens zu beurteilen<sup>8</sup>.

**Satz 7.3.** Gegeben sei ein beliebiges  $n$ -fach zusammenhängendes Gebiet  $G$  der  $z$ -Ebene ( $\infty \in G$ ) mit den Rändern  $C_i$ , die alle in  $|z| \leq R$  liegen mögen. Jedes Randkontinuum  $C_i$  sei durch eine Jordan-Kurve  $\Gamma_i$  umschlossen, so daß  $C_i$  und  $\Gamma_i$   $n$  fremde Ringgebiete von den Moduln  $M_i (> 1)$  beranden; wir setzen  $M = \min_{1 \leq i \leq n} M_i$ .

Weiter bezeichne  $w = f(z)$  die konforme und in  $z = \infty$  normierte Abbildung von  $G$  auf ein Vollkreisgebiet  $V$ , und es sei  $D = \text{dist}(V, \bigcup_i \gamma_i)$  gesetzt, wenn  $\gamma_i$  die durch einmalige Spiegelung von  $V$  an dessen Randkreisen entstehenden  $n(n-1)$  neuen Kreise sind.

Dann gilt für die durch das Koebesche iterierende Verfahren gewonnenen Näherungsfunktionen  $f_m(z)$  die Abschätzung

$$(7.4) \quad |f_m(z) - f(z)| \leq \frac{\{4\pi + K(M)M^2\} \cdot R^2}{\sqrt{3}D} \cdot \frac{1}{M^{\frac{1}{4} \left[ \frac{m-1}{n-1} \right]}} \quad (z \in G; m \geq n).$$

$K(M)$  bedeutet wieder die Konstante aus Satz 1.2.

Beweis. Zu beurteilen ist

$$|f_m(z) - f(z)| = |f_m f^{-1}(w) - w| = |g(w) - w| \quad (w \in V),$$

und Satz 7.2 ist anwendbar mit  $N = \left[ \frac{m-1}{n-1} \right]$  (Satz 7.1). Als die Kurven  $\Gamma_i$  in Satz 7.2 hat man dabei jetzt  $f(\Gamma_i)$  zu nehmen. Weiter ist noch zu beachten, daß alle Ränder von  $V$  und von  $G_m = f_m(G)$  in  $|w| \leq 2R$  bzw.  $|z_m| \leq 2R$  liegen, was wegen der Normierung von  $f(z)$  und  $f_m(z)$  in  $z = \infty$  der Fall ist ([10], S. 178).

### § 8. Das „Iterationsverfahren“ von KOEBE

Neben dem in § 7 besprochenen Verfahren hat KOEBE 1920 noch ein weiteres funktionentheoretisches Iterationsverfahren zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete eingeführt, dem wir uns jetzt zuwenden wollen.

**A. Angabe des Verfahrens.** Vorgegeben sei ein beliebiges  $n$ -fach zusammenhängendes Gebiet  $G = G_0$  der  $z_0$ -Ebene mit  $\infty \in G_0$  und den Randkomponenten  $C_i^{(0)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), welches auf ein Vollkreisgebiet abzubilden sei.

Beim ersten Schritt werde das gesamte Äußere von  $C_1^{(0)}$  durch  $z_1 = h_1(z_0)$  konform und normiert auf das Äußere eines Kreises  $K^{(1)}$  abgebildet und sodann das entstehende Gebiet  $G_1 = h_1(G_0)$  an  $K^{(1)}$  gespiegelt. Der Kreis  $K^{(1)}$  wird gelöscht, so daß als Berandungen übrig bleiben  $C_i^{(1)} = h_1(C_{i+1}^{(0)})$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) und deren Spiegelbilder:  $C_{n-1+i}^{(1)}$  als Spiegelbild von  $C_i^{(1)}$  an  $K^{(1)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Allgemein liegen vor dem  $m$ -ten Schritt die Kurven  $C_i^{(m-1)}$  ( $i = 1, 2, \dots, r_{m-1}$ ) vor, und durch  $z_m = h_m(z_{m-1})$  wird nun das gesamte Äußere von  $C_1^{(m-1)}$  konform und normiert auf das Äußere eines Kreises  $K^{(m)}$  abgebildet und sodann das entstehende, von  $K^{(m)}$  und  $h_m(C_i^{(m-1)})$  ( $i = 2, 3, \dots, r_{m-1}$ ) berandete Gebiet an  $K^{(m)}$  gespiegelt. Der Kreis  $K^{(m)}$  wird gelöscht, so daß als Berandungen übrig bleiben  $C_i^{(m)} = h_m(C_{i+1}^{(m-1)})$  ( $i = 1, 2, \dots, r_{m-1}-1$ ) sowie deren Spiegelbilder an  $K^{(m)}$ , insgesamt also  $r_m = 2r_{m-1} - 2$  Ränder.

<sup>8</sup> Wir verlassen jetzt die Bezeichnungen von Satz 7.2 wieder.

Wie in § 7 erhält man durch Hintereinanderschalten der  $m$  Abbildungen  $h_1(z_0), h_2(z_1), \dots, h_m(z_{m-1})$  die  $m$ -te Näherung für die gesuchte Abbildungsfunktion

$$f_m(z_0) = h_m \dots h_2 h_1(z_0) \quad (z_0 \in G_0; m = 1, 2, \dots);$$

wir setzen noch  $G_m = f_m(G_0)$ .

**B. Konvergenz des Verfahrens.** Wie in § 7 ist auch hier für die Konvergenzgeschwindigkeit die allseitige Spiegelungsfähigkeit  $N(m)$  von  $G_m$  maßgebend, die wir daher zunächst untersuchen.

Dazu legen wir jeder Berandung  $C_i^{(m)}$  eine Kennzahl bei, die angibt, wie oft  $G_m$  gespiegelt werden muß, um  $C_i^{(m)}$  zu erreichen.

Nach  $m-1$  Schritten liegen vor  $C_1^{(m-1)}, \dots, C_{r_{m-1}}^{(m-1)}$ . Wir nehmen an, daß ihre Kennzahlen mit wachsendem unterem Index monoton (im weiteren Sinne) zunehmen; dies ist bei nicht-spezieller Wahl von  $G_0$  richtig für  $m=1$ . Von diesen Rändern haben

$$\begin{array}{ll} A_k & \text{die Kennzahl } k \\ A_{k+1} & \text{die Kennzahl } k+1 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ A_s & \text{die Kennzahl } s. \end{array}$$

Beim  $m$ -ten Schritt wird zunächst  $C_1^{(m-1)}$  auf den Kreis  $K^{(m)}$  abgebildet, und es verbleiben

$$(8.1) \quad \begin{array}{ll} A_k - 1 & \text{Ränder mit der Kennzahl } k \\ A_{k+1} & \text{Ränder mit der Kennzahl } k+1 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ A_s & \text{Ränder mit der Kennzahl } s. \end{array}$$

Die  $C_i^{(m)} = h_m(C_{i+1}^{(m-1)})$  ( $i=1, 2, \dots, r_{m-1}-1$ ) haben nämlich dieselbe Kennzahl wie  $C_{i+1}^{(m-1)}$  (§ 6, (d)), also wachsen auch deren Kennzahlen mit unterem Index monoton. Durch die Spiegelung dieser Kurven am Kreis  $K^{(m)}$  entstehen

$$(8.2) \quad \begin{array}{ll} A_k - 1 & \text{Ränder mit der Kennzahl } (2k+1) + k \\ A_{k+1} & \text{Ränder mit der Kennzahl } (2k+1) + k+1 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ A_s & \text{Ränder mit der Kennzahl } (2k+1) + s. \end{array}$$

Auch die Kennzahlen der Spiegelbilder wachsen monoton, so daß insgesamt die  $C_i^{(m)}$  ( $i=1, 2, \dots, r_m$ ) mit unterem Index monoton wachsende Kennzahlen besitzen.

Bei diesem Prozeß wird also auf systematische Art stets eine Randkomponente kleinster Kennzahl auf einen Kreis abgebildet und durch dessen Löschung weggeschafft. Durch (8.1) und (8.2) ist ein rekursives Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe sich berechnen läßt, wieviel Ränder nach dem  $m$ -ten Schritt eine gewisse Kennzahl haben. Das Minimum aller auftretenden Kennzahlen ist die allseitige Spiegelungsfähigkeit  $N(m)$  von  $G_m$ , und da beim Beweis von Satz 7.3 nur die Spiegelungsfähigkeit von  $G_m$ , nicht aber die spezielle Konstruktion des Iterationsverfahrens benützt wurde, können wir sagen:

Satz 8.1. *Unter den Bedingungen von Satz 7.3 gilt die dortige Aussage (7.4), wenn  $\left\lfloor \frac{m-1}{n-1} \right\rfloor$  durch die zum Koebeschen „Iterationsverfahren“ gehörige Funktion  $N(m)$  ersetzt wird.*

Nun ist in dem hier vorliegenden Fall kein handlicher Ausdruck für  $N(m)$  angebar, außer im Fall  $n=2$ , auf den wir in § 9 zurückkommen werden. Für  $n>2$  beschränken wir uns auf die Feststellung, daß  $N(m)$  im allgemeinen beträchtlich langsamer wächst als  $\left\lfloor \frac{m-1}{n-1} \right\rfloor$  in § 7. Ist  $G_0$  zum Beispiel dreifach zusammenhängend, so ergeben nämlich unsere Rekursionsformeln (8.1) und (8.2), daß

$N(m)=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
in § 8 erstmals für $m=$	3	6	11	13	16	31	37	52	77	98
in § 7 erstmals für $m=$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

gilt. Dieser Nachteil des Iterationsverfahrens rührt daher, daß durch die Spiegelung an  $K^{(m)}$  zwar die Kennzahlen der Ränder vergrößert werden, jedoch auch die Anzahl der wegzuschaffenden Ränder exponentiell wächst, während beim iterierenden Verfahren stets nur  $n$  Ränder in Betracht bleiben. Dadurch wird dort die allseitige Spiegelungsfähigkeit gleichmäßiger erhöht als hier.

Wir können also feststellen, daß vom praktischen Standpunkt aus das „iterierende Verfahren“ (§ 7) dem „Iterationsverfahren“ im Fall  $n \geq 3$  vorzuziehen ist, wenngleich auch jetzt  $N(m) \nearrow \infty$  ( $m \rightarrow \infty$ ) gilt und damit die Konvergenz des Verfahrens feststeht.

### § 9. Iterationsverfahren für Ringgebiete

Wir kommen jetzt speziell zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete (= Ringgebiete). In **A** sollen die Ergebnisse von § 7 und § 8 auf den Fall  $n=2$  spezialisiert werden, während wir in **B** und **C** die konforme Abbildung von Ringgebieten auf konzentrische Kreise behandeln.

**A. Der Sonderfall  $n=2$  in § 7 und § 8.** Vorgegeben sei ein beliebiges zweifach zusammenhängendes Gebiet  $G$  der  $z$ -Ebene ( $\infty \in G$ ) mit den Rändern  $C_1$  und  $C_2$ , die beide in  $|z| \leq R$  liegen mögen. Der Modul von  $G$  sei  $M(>1)$ , und das Vollkreisgebiet, auf das  $G$  vermöge  $w=f(z)$  konform und in  $z=\infty$  normiert abgebildet werden soll, heiße  $V$ . Mit  $D$  bezeichnen wir wieder den Abstand von  $V$  zu den beiden Kreisen, die durch einmalige Spiegelung von  $V$  an seinen beiden Randkreisen entstehen.

Um  $f(z)$  zu approximieren, können wir zwei Methoden verwenden.

a) Zunächst wird das iterierende Verfahren von § 7 jetzt zu einem alternierenden Verfahren, und die danach gebildeten Näherungsfunktionen für  $f(z)$  bezeichnen wir mit  $f_m(z)$ . Um Satz 7.3 anwenden zu können, bemerken wir, daß sich zwischen  $C_1$  und  $C_2$  eine Niveaulinie  $\Gamma$  legen läßt, derart, daß  $C_1$  und  $\Gamma$  sowie  $C_2$  und  $\Gamma$  zwei fremde Ringgebiete des Moduls  $|M|$  beranden;  $|M|$  tritt daher an die Stelle von  $M$  in § 7. Wir erhalten somit



Satz 9.1. *Bildet man für das Gebiet  $G$  des Moduls  $M$  die Funktionen  $f_m(z)$  nach dem iterierenden Verfahren von § 7, so gilt*

$$(9.1) \quad |f_m(z) - f(z)| \leq \frac{\{4\pi + K(\sqrt{M})M\}R^2}{\sqrt[3]{3}D} \cdot \frac{1}{M^{2(m-1)}} \quad (z \in G; m \geq 2).$$

Die Abschätzung ließe sich noch etwas verbessern, da wir nur die allseitige Spiegelungsfähigkeit ausgenützt haben und daher eine weitere Spiegelungsmöglichkeit unberücksichtigt ließen.

b) Nun wenden wir auf  $G$  das Iterationsverfahren des § 8 an. Wie schon dort bemerkt, werden jetzt durch die bei jedem Schritt eingeschaltete Spiegelung an einem Kreis die Kennzahlen der nicht gelöschten Ränder erhöht. Da nun im Fall  $n = 2$  dieser Gewinn nicht mit einer Vermehrung der zu löschenden Ränder verbunden ist, ergibt sich eine beträchtliche Konvergenzverbesserung.

Wir ermitteln zunächst  $N(m)$  mit Hilfe unserer Rekursionsformeln (8.1) und (8.2). Vor dem  $m$ -ten Schritt habe der eine Rand die Kennzahl  $\alpha_{m-1}$ , der andere die Kennzahl  $\alpha_{m-2} \leq \alpha_{m-1}$ . Dann haben die Ränder nach dem  $m$ -ten Schritt die Kennzahlen  $\alpha_{m-1}$  bzw.  $\alpha_m = 2\alpha_{m-2} + \alpha_{m-1} + 1$ . Nennen wir also die Kennzahl des beim  $m$ -ten Schritt neu hinzukommenden Randes  $\varphi(m)$ , so gilt  $\varphi(m) = 2\varphi(m-2) + \varphi(m-1) + 1$ ; als Anfangsbedingungen dieser Rekursion haben wir  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi(2) = 2$ . Die Lösung der Differenzgleichung ergibt sich zu

$$\varphi(m) = \frac{2}{3} \cdot 2^m - \frac{1}{6} \cdot (-1)^m - \frac{1}{2},$$

und da  $N(m) = \varphi(m-1)$  ist, haben wir damit

$$(9.2) \quad N(m) = \frac{2^{m+1} + (-1)^m - 3}{6} \quad (m \geq 1)$$

gefunden. Wir bemerken noch

$$N(m) \geq \frac{2^{m+1} - 4}{6} \geq \frac{2^m}{6} \quad (m \geq 2).$$

Ganz entsprechend wie in a) erhalten wir somit

Satz 9.2. *Bildet man für das Gebiet  $G$  des Moduls  $M$  die Funktionen  $f_m(z)$  nach dem Iterationsverfahren von § 8, so gilt*

$$(9.3) \quad |f_m(z) - f(z)| \leq \frac{\{4\pi + K(\sqrt{M})M\}R^2}{\sqrt[3]{3}D} \cdot \frac{1}{M^{2N(m)}} \quad (z \in G; m \geq 2),$$

wobei  $N(m)$  aus (9.2) zu entnehmen ist und außerdem  $N(m) \geq \frac{2^m}{6}$  ( $m \geq 2$ ) gilt.

Eine geringe Mehrarbeit beim Iterationsverfahren (zu der bei jedem Schritt auszuführenden konformen Abbildung kommt noch eine Spiegelung) bewirkt also eine erhebliche Beschleunigung der Konvergenz.

**B. Das Iterationsverfahren von KOMATU.** Für den Rest dieses Paragraphen ist unser Ausgangsgebiet  $G = G_0$  der  $z_0$ -Ebene ein Ringgebiet, das außen von  $|z_0| = 1$  und innen von einem in  $|z_0| < 1$  verlaufenden Kontinuum  $C_0$  berandet ist;  $z_0 = 0$  sei  $\notin G_0$ . Ist  $M(>1)$  der Modul von  $G_0$ , so liegt die Aufgabe vor,  $G_0$  durch eine konforme Abbildung  $w = f(z_0)$  auf den konzentrischen Kreisring  $M^{-1} < |w| < 1$  so abzubilden, daß  $f(1) = 1$  wird.

Als eine erste Möglichkeit zur Lösung dieser Aufgabe besprechen wir das Verfahren von KOMATU (siehe [5]), das auf derselben Grundidee beruht wie das iterierende Verfahren für  $n=2$ . Der erste Iterationsschritt wird in zwei Etappen ausgeführt. Zunächst sei  $t_1 = g_1(z_0)$  eine konforme Abbildung des gesamten Äußeren von  $C_0$  auf  $|t_1| > 1$  mit  $g_1(\infty) = \infty$ . Sodann bilde man durch  $z_1 = h_1(t_1)$  das gesamte Innere von  $g_1(|z_0| = 1)$  auf  $|z_1| < 1$  ab mit  $h_1(0) = 0$ ; außerdem sei  $h_1$  so normiert, daß  $h_1 g_1(1) = 1$  wird. Die analytische Jordan-Kurve  $h_1(|t_1| = 1)$  nennen wir  $C_1$ ; mit  $|z_1| = 1$  zusammen berandet sie  $G_1 = h_1 g_1(G_0)$ .

Allgemein wird beim  $m$ -ten Schritt zunächst das ganze Äußere von  $C_{m-1}$  durch  $t_m = g_m(z_{m-1})$  auf  $|t_m| > 1$  abgebildet ( $g_m(\infty) = \infty$ ), und hernach übe man eine konforme Abbildung  $z_m = h_m(t_m)$  aus, die das Innere von  $g_m(|z_{m-1}| = 1)$  auf  $|z_m| < 1$  abbildet, wobei  $h_m(0) = 0$  und  $h_m g_m(1) = 1$  sein soll. Als Bild von  $|t_m| = 1$  erscheint  $C_m$ , die mit  $|z_m| = 1$  zusammen  $G_m$  berandet.

Durch Hintereinanderschalten der  $2m$  ersten Abbildungen erhalten wir die  $m$ -te Iteration

$$f_m(z_0) = h_m g_m \dots h_2 g_2 h_1 g_1(z_0) \quad (z_0 \in G_0; m \geq 1).$$

In einer früheren Arbeit ([5]) hatten wir durch wiederholte Anwendung einer Verfeinerung des Schwarzschen Lemmas gezeigt, daß die Kurven  $C_m$  in einem präzisen Sinne immer mehr kreisförmig werden, woraus sich dann die Konvergenzaussage

$$(9.4) \quad |f_m(z_0) - f(z_0)| = O\left(\left\{\frac{4}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} M^{-1}\right\}^{2m}\right) \quad (z_0 \in G_0; m \rightarrow \infty)$$

ergab. Die folgenden Überlegungen verbessern diese Abschätzung.

Man stellt nämlich durch eine Betrachtung der beiden Einzelschritte fest: Wenn  $G_m$  über  $C_m$  hinein  $\alpha_m$ -mal spiegelungsfähig ist, so ist  $G_{m+1}$  über  $C_{m+1}$  hinein  $(\alpha_m + 2)$ -mal spiegelungsfähig. Das bedeutet, daß  $G_m$  über  $C_m$  hinein  $2m$ -mal gespiegelt werden kann, oder, daß die durch  $z_m = f_m f^{-1}(w)$  vermittelte Abbildung von  $M^{-1} < |w| < 1$  auf  $G_m$  schlicht nach  $(M^{-1})^{2m} < |w| < 1$  fortgesetzt werden kann (§ 6, (g)). Dabei erkennt man weiter, daß bei dieser Fortsetzung  $z_m = 0$  ausgelassen wird. Wir können daher Satz 5.1 auf die Funktion  $f_m f^{-1}(w)$  und für  $r = M^{-2m}$  anwenden und erhalten so

$$|f_m f^{-1}(w) - w| \leq C \cdot M^{-2m} \quad (M^{-1} < |w| \leq 1; m = 1, 2, \dots),$$

das heißt

$$|f_m(z_0) - f(z_0)| \leq C \cdot M^{-2m} \quad (z_0 \in G_0; m = 1, 2, \dots).$$

**Satz 9.3.** *Es sei  $G$  ein Ringgebiet der  $z$ -Ebene, das außen von  $|z| = 1$  und innen von einem in  $|z| < 1$  verlaufenden Kontinuum berandet sei;  $z=0$  sei  $\notin G$ . Bildet man dann nach dem Verfahren von KOMATU die Iterationen  $f_m(z)$  für die konforme und durch  $f(1) = 1$  normierte Abbildung  $w = f(z)$  von  $G$  auf  $M^{-1} < |w| < 1$ , so gilt*

$$(9.5) \quad |f_m(z) - f(z)| \leq C \cdot M^{-2m} \quad (z \in G; m = 1, 2, \dots),$$

wobei  $C \leq 12,6$  die in Satz 5.1 auftretende absolute Konstante ist<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> Beim Vergleich mit Satz 9.1 beachte man jedoch, daß jetzt für einen Iterationsschritt zwei konforme Abbildungen auszuführen sind.

Unsere neue Konvergenzaussage (9.5) ist besser als die frühere (9.4), da  $M^{-1} < \frac{4}{\pi} \arctg M^{-1}$  ist. Wir bemerken noch, daß für die Gültigkeit von (9.5) nur  $f_m(1) = 1$  wichtig war, nicht jedoch die Erfüllung aller vorhergegangenen Normierungen  $h_k g_k(1) = 1$ .

**C. Ein weiteres Iterationsverfahren.** Wir bemerkten bereits, daß das Koebsche Iterationsverfahren dem iterierenden Verfahren im Falle der Ringgebiete überlegen ist. Da nun das Verfahren von KOMATU in völliger Analogie zum iterierenden Verfahren aufgebaut ist, entsteht die Frage, ob man nicht in naheliegender Weise durch Einschalten einer Spiegelung bei jedem Einzelschritt des Komatuschen Verfahrens ebenso eine Konvergenzverbesserung erzielen kann<sup>10</sup>. Dies ist der Fall, wie wir jetzt näher ausführen wollen.

Unser Ausgangsgebiet sei wie in **B** beschaffen, doch spiegeln wir gleich  $C_0$  an  $|z_0| = 1$  und erhalten  $C'_0$ . Jeder Iterationsschritt zerfällt nun wieder in zwei Teilschritte. Zunächst bilde man das ganze Äußere von  $C_0$  durch  $t_1 = g_1(z_0)$  ( $g_1(\infty) = \infty$ ) konform auf  $|t_1| > 1$  ab und spiegele  $g_1(C'_0)$  an  $|t_1| = 1$ , was  $C''_0$  ergebe. Danach werde das ganze Innere von  $g_1(C'_0)$  durch  $z_1 = h_1(t_1)$  konform auf  $|z_1| < 1$  abgebildet ( $h_1(0) = 0$ ), wobei  $C''_0$  in  $C_1$  übergehe; das Spiegelbild von  $C_1$  bezüglich  $|z_1| = 1$  heiße  $C'_1$ . Beim nächsten Schritt übernehmen  $C_1$  und  $C'_1$  die Rolle von  $C_0$  und  $C'_0$ , und das Verfahren fährt in Analogie zum Iterationsverfahren fort. Nach  $m$  Iterationsschritten (jeder bestehend aus zwei Teilschritten) erhalten wir durch Zusammensetzen unserer konformen Abbildungen

$$F_m(z_0) = h_m g_m \dots h_2 g_2 h_1 g_1(z_0) \quad (z_0 \in G_0; m = 1, 2, \dots),$$

und durch  $F_m(z_0)/F_m(1)$  ist auch noch der Normierungsvorschrift ( $z_0 = 1$ )  $\rightarrow$  ( $z_m = 1$ ) genügt.

Wir vermuten, daß in Analogie zu **A.b** schon diese Funktionen  $F_m(z_0)/F_m(1)$  mit wachsendem  $m$  die gesuchte Abbildung  $w = f(z_0)$  von  $G_0$  auf  $M^{-1} < |w| < 1$  immer besser approximieren, doch haben wir dafür nicht die nötigen Hilfsmittel bereit. Daher schalten wir nach Ausführung der durch  $F_m(z_0)$  ausgedrückten  $m$  Iterationsschritte noch eine weitere konforme Abbildung  $\Phi_m(z_m)$  vor, die das ganze Innere des Außenrandes von  $F_m(G_0)$  auf den Einheitskreis abbildet, und unsere  $m$ -te Iteration heißt nunmehr endgültig

$$f_m(z_0) = \Phi_m h_m g_m \dots h_2 g_2 h_1 g_1(z_0) \quad (z_0 \in G_0; m = 1, 2, \dots);$$

die Normierung von  $\Phi_m$  soll so gewählt werden, daß  $\Phi_m(0) = 0$  und  $f_m(1) = 1$  wird. Zur Gewinnung von  $f_m(z_0)$  sind also  $2m + 1$  konforme Abbildungen und  $2m$  Spiegelungen notwendig.

Die Einschaltung dieser Spiegelungen hat nun zur Folge, daß unser gewonnenes Bildgebiet  $G_m = f_m(G_0)$  über seinen Innenrand hinein

$$(9.6) \quad N(m) = \frac{2}{3} (4^m - 1) \quad (m \geq 1)$$

mal gespiegelt werden kann. Diese Formel für  $N(m)$  findet man aus einer Rekursionsformel  $[N(m+2) = 5N(m+1) - 4N(m)]$ , oder auf Grund der Bemerkung, daß sich hier nach  $m$  Schritten dasselbe  $N$  ergeben muß wie in **A** (9.2) für  $2m + 1$ .

<sup>10</sup> Die Untersuchung eines solchen Verfahrens wurde durch Herrn HÜBNER angeregt.

Wir erhalten daher genau so wie in Teil **B** den

Satz 9.4. Es sei  $G$  ein Ringgebiet der  $z$ -Ebene, das außen von  $|z|=1$  und innen von einem in  $|z|<1$  verlaufenden Kontinuum berandet sei;  $z=0$  sei  $\notin G$ . Bildet man dann nach dem oben geschilderten Verfahren die Iterationen  $f_m(z)$  für die konforme und durch  $f(1)=1$  normierte Abbildung  $w=f(z)$  von  $G$  auf  $M^{-1}<|w|<1$ , so gilt

$$(9.7) \quad |f_m(z) - f(z)| \leq C \cdot M^{-N(m)} \quad (z \in G; m = 1, 2, \dots),$$

wobei  $C \leq 12,6$  die in Satz 5.1 auftretende absolute Konstante und  $N(m)$  aus (9.6) zu entnehmen ist.

Die Einschaltung von Spiegelungen bei jedem Iterationsschritt wurde also mit einer beträchtlichen Beschleunigung der Konvergenz des Verfahrens belohnt.

### § 10. Anhang

Im folgenden sollen die in § 9, **B** und **C** geschilderten Iterationsverfahren noch auf das Beispiel eines exzentrischen Kreistrings angewandt werden. In diesem Falle lassen sich die exakte Abbildung und die Näherungsfunktionen und damit auch der Approximationsfehler explizit berechnen. Wir vergleichen die Ergebnisse der verschiedenen Iterationsverfahren und machen insbesondere Aussagen über die Qualität der Fehlerabschätzungen (9.5) und (9.7) [vgl. die Zusätze zu den Sätzen 9.3 und 9.4, unten].

**A. Das Verfahren von KOMATU.** a) Aufstellung der Näherungen. Unser Ausgangsgebiet  $G=G_0$  der  $z_0$ -Ebene sei als Bild von  $M^{-1}<|w|<1$  vermöge

$$(10.1) \quad z_0 = \frac{1-\bar{a}_0}{1-a_0} \cdot \frac{w-a_0}{1-\bar{a}_0 w} = l_0(w)$$

dargestellt. Es wird von  $|z_0|=1$  und einem  $z_0=0$  umschließenden Kreis berandet, falls noch  $|a_0|<M^{-1}$  gewählt ist. Die nach dem Komatuschen Verfahren (§ 9, **B**) konstruierten Gebiete  $G_m$  sind wieder exzentrische Kreistringe, deren eine Berandung  $|z_m|=1$  ist, so daß  $G_m$  als Bild von  $M^{-1}<|w|<1$  vermöge

$$(10.2) \quad z_m = \frac{1-\bar{a}_m}{1-a_m} \cdot \frac{w-a_m}{1-\bar{a}_m w} = l_m(w)$$

angesetzt werden kann, und dabei ist gleich  $w=1$  in  $z_m=1$  übergeführt. Zur Beurteilung des Verfahrens ermitteln wir  $\{a_m\}$  rekursiv.

Zunächst wird die Abbildung  $z_m \rightarrow t_{m+1}$  in den beiden Schritten  $z_m \rightarrow t'_{m+1}$  und  $t'_{m+1} \rightarrow t_{m+1}$  durchgeführt, wobei

$$t'_{m+1} = M l_m^{-1}(z_m), \quad t_{m+1} = \frac{t'_{m+1} - \alpha}{1 - \bar{\alpha} t'_{m+1}}$$

gilt. Um  $z_m = \infty$  in  $t_{m+1} = \infty$  zu bringen, ist offenbar

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{t'_{m+1}(\infty)} = \frac{1}{M l_m^{-1}(\infty)} = \frac{\bar{a}_m}{M}, \quad \text{also} \quad \alpha = \frac{a_m}{M}$$

erforderlich. Die Abbildung  $z_{m+1} = h_{m+1}(t_{m+1})$  ist wieder linear, mit  $h_{m+1}(0) = 0$ .



Nun läßt sich  $a_{m+1}$  leicht errechnen:

$$z_{m+1} = 0 \rightarrow t_{m+1} = 0 \rightarrow t'_{m+1} = \frac{a_m}{M} \rightarrow z_m = l_m(t'_{m+1}/M) = l_m(a_m/M^2) \rightarrow w = \frac{a_m}{M^2}.$$

Andererseits ist auch  $w = a_{m+1}$  Urbild von  $z_{m+1} = 0$ , d.h. es gilt  $a_{m+1} = \frac{a_m}{M^2}$  oder allgemein

$$(10.3) \quad a_m = \frac{a_0}{M^{2m}} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{mit} \quad |a_0| < M^{-1}.$$

Unsere Näherungsfunktionen  $f_m(z_0)$  für die exakte Abbildungsfunktion  $f(z_0) = l_0^{-1}(z_0)$  schreiben sich dann in der Form  $f_m(z_0) = l_m l_0^{-1}(z_0)$  und sind durch (10.1) bis (10.3) vollständig bestimmt;  $f_m(1) = 1$  ist ersichtlich erfüllt.

b) *Beurteilung der Approximation an einem konkreten Beispiel.* Zu untersuchen ist der Maximalfehler

$$\delta_m = \max_{z_0 \in G_0} |f_m(z_0) - f(z_0)| = \max |z_m - w| = \max_{M^{-1} \leq |w| \leq 1} |l_m(w) - w|;$$

dabei können wir, da  $l_m(w) - w$  sogar in  $|w| \leq 1$  regulär ist und daher nach dem Maximumprinzip  $\max_{|w|=r} |l_m(w) - w|$  mit  $r$  monoton wächst, auch nur  $\max_{|w|=1} |l_m(w) - w|$  ermitteln. Ist  $a_0$  und daher  $a_m$  reell (zur reellen Achse symmetrischer Kreisring), so ergibt eine leichte Rechnung

$$\delta_m = 2a_m = \frac{2a_0}{M^{2m}} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Ist unser Ausgangsgebiet  $G_0$  etwa das von  $|z_0| = 1$  und  $|z_0 + \frac{4}{21}| = \frac{10}{21}$  berandete Gebiet ( $M = 2, a_0 = \frac{1}{4}$ ), so ergibt sich als maximale Abweichung der Komatuschen Näherung gegen die exakte Abbildungsfunktion

$$(10.4) \quad \delta_m = \frac{1}{2} \cdot 4^{-m} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

c) *Beurteilung der Güte der Fehlerabschätzung (9.5).* Wir untersuchen nun  $\delta_m = \max_{|w|=1} |l_m(w) - w|$  im allgemeinen Fall eines komplexen  $a_0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} |l_m(w) - w| &= \left| \frac{1 - \bar{a}_m}{1 - \bar{a}_m w} \cdot \frac{w - a_m}{1 - \bar{a}_m w} - w \right| \\ &= |(1 - \bar{a}_m)(1 + a_m)(w - a_m)(1 + \bar{a}_m w) - w| + O(M^{-4m}) \\ &= |(\bar{a}_m w + a_m)(w - 1)| + O(M^{-4m}) \\ &= |a_0| \cdot M^{-2m} |w - 1|^2 + O(M^{-4m}), \\ \delta_m &= 4|a_0| \cdot M^{-2m} + O(M^{-4m}) \quad (m = 1, 2, \dots); \end{aligned}$$

dabei wurde (10.3) verwendet und  $a_0 = i|a_0|$  gesetzt. Da  $|a_0|$  nur der Bedingung  $|a_0| < M^{-1}$  unterworfen ist und  $M > 1$  beliebig sein kann, sehen wir an diesem Beispiel:

*Zusatz zu Satz 9.3. Die Größenordnung der Abschätzung (9.5) ist bestmöglich. Weiter kann die dort auftretende absolute Konstante  $C \leq 12,6$  durch keine Konstante  $< 4$  ersetzt werden.*

**B. Das Verfahren von § 9, C. a) Aufstellung der Näherungen.** Als Ausgangsgebiet  $G = G_0$  wählen wir wieder das Bild von  $M^{-1} < |w| < 1$  vermöge

$$(10.5) \quad z_0 = \frac{1 - \bar{a}_0}{1 - a_0} \cdot \frac{w - a_0}{1 - \bar{a}_0 w} = l_0(w); \quad |a_0| < M^{-1}.$$

Unser erstes Ziel ist es, die Funktion  $F_m(z_0)$  zu bestimmen (Bezeichnungen wie in § 9, C). Diese Funktion bildet ganz allgemein  $G_0$  auf ein Ringgebiet ab, das über seinen Innenrand  $N(m)$  mal (bis zur Kurve  $C_m$ ) und über seinen Außenrand, bis zu  $|z_m| = 1$  hin betrachtet,  $K(m)$  mal spiegelungsfähig ist, wobei

$$(10.6) \quad K(m) = \frac{1}{3}(4^m - 1) \quad \text{und} \quad N(m) = \frac{2}{3}(4^m - 1) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

gilt. Führt man die entsprechenden Spiegelungen in der  $w$ -Ebene durch, so entstehen die beiden Kreise  $|w| = r_m$  und  $|w| = R_m$  als Urbilder von  $C_m$  und  $|z_m| = 1$ , und dabei ist

$$(10.7) \quad r_m = M^{-N(m)-1} \quad \text{und} \quad R_m = M^{K(m)}.$$

Setzen wir daher  $\zeta_m = R_m z_m$ , so ist der Zusammenhang zwischen  $\zeta_m$  und  $w$  von der Form

$$\zeta_m = R_m \cdot \frac{w - a_m R_m}{R_m - \bar{a}_m w} = l_m(w).$$

Hierin ist  $R_m$  durch (10.7) bekannt, so daß noch  $a_m$  zu ermitteln ist.

Dazu führen wir den  $(m+1)$ -ten Iterationsschritt aus, dessen ersten Teilschritt  $z_m \rightarrow t_{m+1}$  wir in den beiden Etappen  $z_m \rightarrow t'_{m+1}$  und  $t'_{m+1} \rightarrow t_{m+1}$  erledigen. Wir setzen

$$t'_{m+1} = r_m^{-1} l_m^{-1}(\zeta_m), \quad t_{m+1} = \frac{t'_{m+1} - \alpha}{1 - \bar{\alpha} t'_{m+1}};$$

$C_m$  wird dadurch in  $|t_{m+1}| = 1$  übergeführt und  $z_m = \infty$  in  $t_{m+1} = \infty$ , wenn

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{t'_{m+1}(\infty)} = \frac{r_m}{l_m^{-1}(\infty)} = \frac{r_m}{R_m} \cdot \bar{a}_m, \quad \text{d.h.} \quad \alpha = \frac{r_m}{R_m} \cdot a_m$$

gewählt wird. Die Abbildung  $z_{m+1} = h_{m+1}(t_{m+1})$  ist wieder linear, mit  $h_{m+1}(0) = 0$ .

Damit läßt sich  $a_{m+1}$  errechnen:

$$z_{m+1} = 0 \rightarrow t_{m+1} = 0 \rightarrow t'_{m+1} = \alpha = \frac{r_m}{R_m} \cdot a_m \rightarrow \zeta_m = l_m(a_m r_m^2 / R_m).$$

Andererseits ist auch  $w = a_{m+1} R_{m+1}$  und also  $\zeta_m = l_m(a_{m+1} R_{m+1})$  Urbild von  $z_{m+1} = 0$ , also gilt

$$a_{m+1} R_{m+1} = \frac{r_m^2}{R_m} a_m \quad \text{oder} \quad a_{m+1} = \frac{r_m^2}{R_m R_{m+1}} a_m,$$

und (10.6) und (10.7) liefern sofort

$$(10.8) \quad a_{m+1} = M^{-3 \cdot 4^m} a_m \quad \text{oder} \quad a_m = a_0 M^{-(4^m - 1)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Unsere gesuchte Funktion  $F_m(z_0)$  stellt sich somit dar durch

$$F_m(z_0) = R_m^{-1} l_m l_0^{-1}(z_0),$$

und die auftretenden Größen  $R_m$  und  $a_m$  sind durch  $a_0$  und  $M$  bestimmt. Aus dieser Funktion stellen wir nun, gemäß unserem Vorgehen in § 9, C, zweierlei Näherungen her.

Erstens wollen wir lediglich noch der Normierungsvorschrift  $(z_0=1) \rightarrow (z_m=1)$  genügen, indem wir

$$f_m^{(1)}(z_0) = F_m(z_0)/F_m(1) = \frac{l_m l_0^{-1}(z_0)}{l_m l_0^{-1}(1)} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

betrachten. Die zweite Näherung entsteht durch Vorschalten der Funktion  $\Phi_m$  mit  $\Phi_m(0)=0$ , die das ganze Innere des Außenrandes von  $F_m(G_0)$  auf den Einheitskreis abbildet, wobei  $\Phi_m F_m(1)=1$  werden soll. Dies leistet aber

$$\Phi_m = L_m l_0^{-1} F_m^{-1} \quad \text{mit} \quad L_m(s) = \frac{1-A}{1-\bar{A}} \cdot \frac{s-A}{1-\bar{A}s}, \quad A = L_m^{-1}(0) = l_m^{-1}(0) = a_m R_m,$$

und unsere zweite Näherungsfunktion lautet somit in unserem Fall

$$f_m^{(2)}(z_0) = \Phi_m F_m(z_0) = L_m l_0^{-1}(z_0).$$

b) *Beurteilung der Approximation an einem konkreten Beispiel.* Wie in **A** betrachten wir den Sonderfall, daß  $G_0$  von  $|z_0|=1$  und  $|z_0 + \frac{4}{21}| = \frac{10}{21}$  berandet ist ( $M=2$ ,  $a_0 = \frac{1}{4}$ ). Als Maximalfehler

$$\delta_m^{(2)} = \max_{z_0 \in G_0} |f_m^{(2)}(z_0) - f(z_0)| = \max_{z_0 \in G_0} |L_m l_0^{-1}(z_0) - l_0^{-1}(z_0)| = \max_{|w|=1} |L_m(w) - w|$$

erhalten wir sofort

$$(10.9) \quad \delta_m^{(2)} = 2A = 2a_m R_m = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{3}(4^m-1)} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

Für den Maximalfehler von  $f_m^{(1)}(z_0)$  gegen  $f(z_0)$  bestimmen wir

$$\begin{aligned} \max_{z_0 \in G_0} |f_m^{(1)}(z_0) - l_0^{-1}(z_0)| &= \max_{|w|=1} \left| \frac{l_m(w)}{l_m(1)} - w \right| = \max_{|w|=1} \left| \frac{R_m - \bar{a}_m}{1 - a_m R_m} \cdot \frac{w - a_m R_m}{R_m - \bar{a}_m w} - w \right| \\ &= |a_0| \varepsilon_m \cdot \max_{|w|=1} |w - 1| + O(\varepsilon_m^2) \\ &= 2|a_0| \varepsilon_m + O(\varepsilon_m^2), \end{aligned}$$

mit  $\varepsilon_m = M^{-\frac{2}{3}(4^m-1)}$ . Dabei braucht  $a_0$  nicht reell zu sein. Hieraus folgt nun für unser Beispiel ( $M=2$ ,  $a_0 = \frac{1}{4}$ )

$$(10.10) \quad \delta_m^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{3}(4^m-1)} + O(4^{-\frac{2}{3}(4^m-1)}) \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

c) *Beurteilung der Güte der Fehlerabschätzung (9.7).* Lassen wir zur Definition von  $G_0$  rein imaginär Werte von  $a_0$  zu, so finden wir wie in **A** allgemein

$$\begin{aligned} \delta_m^{(1)} &= 2|a_0| \cdot M^{-\frac{2}{3}(4^m-1)} + O(M^{-\frac{4}{3}(4^m-1)}), \\ \delta_m^{(2)} &= 4|a_0| \cdot M^{-\frac{2}{3}(4^m-1)} + O(M^{-\frac{4}{3}(4^m-1)}). \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt die Abschätzung von  $\delta_m^{(2)}$  wie oben den folgenden

Zusatz zu Satz 9.4. *Die Größenordnung der Abschätzung (9.7) ist bestmöglich. Weiter kann die dort auftretende absolute Konstante  $C \leq 12,6$  durch keine Konstante  $< 4$  ersetzt werden.*

Unsere Untersuchung hat auch ergeben, daß im Falle des exzentrischen Kreisinges das Vorschalten von  $\Phi_m$  überflüssig war; die ohne diese Funktion gewonnenen Näherungen  $f_m^{(1)}(z_0)$  lieferten sogar eine bessere Approximation von  $f(z_0)$  als  $f_m^{(2)}(z_0)$ , falls  $a_0$  rein imaginär war.

Ein Vergleich der geschilderten Iterationsverfahren und der Ergebnisse (10.4), (10.9), (10.10) liefert insgesamt folgendes Bild:

	Maximaler Approximationsfehler im Sonderfall $M=2$ ; $a_0=\frac{1}{4}$	Anzahl der bis zum $m$ -ten Schritt notwendigen Operationen
Komatu-Verfahren	$\delta_m = \frac{1}{2} \cdot 4^{-m}$	$2m$ konforme Abbildungen
Verfahren von § 9, C ohne Verwendung von $\Phi_m$	$\delta_m^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{3}(4^m-1)} + O(4^{-\frac{2}{3}(4^m-1)})$	$2m$ konforme Abbildungen $2m$ Spiegelungen
Verfahren von § 9, C mit Verwendung von $\Phi_m$	$\delta_m^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{3}(4^m-1)}$	$2m+1$ konforme Abbildungen $2m$ Spiegelungen

### Literatur

- [1] BEHNKE, H., u. F. SOMMER: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
- [2] BIEBERBACH, L.: Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung. Rend. Circ. Mat. Palermo **38**, 98—112 (1914).
- [3] CARLEMAN, T.: Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik. Math. Z. **1**, 208—212 (1918).
- [4] DANILEVSKI, A. M.: On single-valued univalent functions on an annulus. Referat in Math. Rev. **17**, 1069.
- [5] GAIER, D.: Über ein Iterationsverfahren von KOMATU zur konformen Abbildung von Ringgebieten. J. Math. Mech. **6**, 865—883 (1957).
- [6] GAIER, D.: Über ein Extremalproblem der konformen Abbildung. Math. Z. **71**, 83—88 (1959).
- [7] GARRICK, I. E.: Potential flow about arbitrary biplane wing sections. NACA Techn. Report Nr. 542 (1936).
- [8] GARRICK, I. E.: Conformal mapping in aerodynamics, with emphasis on the method of successive conjugates. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, Bd. **18**, 137—147. Washington 1952.
- [9] GIRONZA SOLANAS, J. A.: Representación conforme de recintos doblemente conexos sobre la corona circular. Universidad **1**, 11—30, 41—69 (1932).
- [10] GOLUSIN, G. M.: Geometrische Funktionentheorie. Berlin 1957.
- [11] GRÖTZSCH, H.: Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. Leipziger Ber. **80**, 367—376 (1928).
- [12] GRÖTZSCH, H.: Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche II. Leipziger Ber. **81**, 217—221 (1929).
- [13] HADWIGER, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.
- [14] HÜBNER, O.: Funktionentheoretische Iterationsverfahren zur konformen Abbildung  $n$ -fach zusammenhängender Gebiete auf Normalgebiete. Zulassungsarbeit zum Staatsexamen. Stuttgart 1958.
- [15] KOEBE, P.: Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche, insbesondere solcher Bereiche, deren Begrenzung von Kreisen gebildet wird. Jahresber. Deutsch. Math. Ver. **15**, 142—153 (1906).
- [16] KOEBE, P.: Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe. Göttinger Nachrichten **1910**, 180—189.
- [17] KOEBE, P.: Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche. Jahresber. Deutsch. Math. Ver. **19**, 339—348 (1910).
- [18] KOEBE, P.: Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung VI. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche. Math. Z. **7**, 235—301 (1920).



- [19] LÖSCH, F.: Auftrieb und Moment eines unsymmetrischen Doppelflügels. Luftfahrt-Forsch. **17**, 22—31 (1940).
- [20] NEHARI, Z.: Conformal Mapping. New York 1952.
- [21] PÓLYA, G., & G. SZEGÖ: Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton 1951.
- [22] SPECHT, E. J.: Estimates on the mapping function and its derivatives in conformal mapping of nearly circular regions. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 183—196 (1951).
- [23] TEICHMÜLLER, O.: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. Deutsche Math. **3**, 621—678 (1938).
- [24] VILLAT, H.: Le problème de DIRICHLET dans une aire annulaire. Rend. Circ. Mat. Palermo **33**, 134—174 (1912).

Mathematisches Institut A  
der Technischen Hochschule  
Stuttgart

*(Eingegangen am 19. Januar 1959)*

## EDITORIAL BOARD

S. BERGMAN

Applied Mathematics and Statistics Laboratory  
Stanford University, California

R. BERKER

Technical University  
Istanbul

L. CESARI

Research Institute for Advanced Study  
Baltimore, Maryland

L. COLLATZ

Institut für Angewandte Mathematik  
Universität Hamburg

A. ERDÉLYI

California Institute of Technology  
Pasadena, California

J. L. ERICKSEN

The Johns Hopkins University  
Baltimore, Maryland

G. FICHERA

Istituto Matematico  
Università di Roma

R. FINN

California Institute of Technology  
Pasadena, California

IRMGARD FLÜGGE-LOTZ

Stanford University  
California

HILDA GEIRINGER

Harvard University  
Cambridge, Massachusetts

H. GÖRTLER

Institut für Angewandte Mathematik  
Universität Freiburg i. Br.

D. GRAFFI

Istituto Matematico „Salvatore Pincherle“  
Università di Bologna

A. E. GREEN

King's College  
Newcastle-upon-Tyne

J. HADAMARD

Institut de France  
Paris

L. HÖRMANDER

Department of Mathematics  
University of Stockholm

M. KAC

Cornell University  
Ithaca, New York

H. LEWY

University of California  
Berkeley, California

A. LICHNEROWICZ

Collège de France  
Paris

C. C. LIN

Massachusetts Institute of Technology  
Cambridge, Massachusetts

C. LOEWNER

Applied Mathematics and Statistics Laboratory  
Stanford University, California

W. MAGNUS

Institute of Mathematical Sciences  
New York University, New York City

G. C. McVITTIE

University of Illinois Observatory  
Urbana, Illinois

J. MEIXNER

Institut für Theoretische Physik  
Technische Hochschule Aachen

C. MIRANDA

Istituto di Matematica  
Università di Napoli

C. B. MORREY

University of California  
Berkeley, California

C. MÜLLER

Mathematisches Institut  
Technische Hochschule Aachen

W. NOLL

Carnegie Institute of Technology  
Pittsburgh, Pennsylvania

A. OSTROWSKI

Mathematische Anstalt der Universität  
Basel

R. S. RIVLIN

Division of Applied Mathematics  
Brown University, Providence, Rhode Island

M. M. SCHIFFER

Stanford University  
California

J. SERRIN

Institute of Technology  
University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota

E. STERNBERG

Division of Applied Mathematics  
Brown University, Providence, Rhode Island

R. TIMMAN

Instituut voor Toegepaste Wiskunde  
Technische Hogeschool Jaffalaan/Delf.

W. TOLLMIEH

Max-Planck-Institut für Strömungsforschung  
Göttingen

A. TONOLO

Seminario Matematico  
Università di Padova

R. A. TOUPIN

Naval Research Laboratory  
Washington 25, D.C.

C. TRUESDELL

801 North College Avenue  
Bloomington, Indiana

H. VILLAT

47, bd. A. Blanqui  
Paris XIII



## CONTENTS

KRÖNER, E., und A. SEEGER, Nicht-lineare Elastizitätstheorie der Versetzen und Eigenspannungen . . . . .	97
SERRIN, J., A Note on the Existence of Periodic Solutions of the Navier-Stokes Equations . . . . .	120
IKENBERRY, E., The Evaluation of Collision Integrals, using Grad's Representation of the Distribution Function . . . . .	123
WILCOX, C. H., Spherical Means and Radiation Conditions . . . . .	133
GAIER, D., Untersuchungen zur Durchführung der konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete . . . . .	149